

P1) Calculate

①

$$a) \int 3x^{-3} + \sqrt{x^5} - 2x^{2/3} dx$$

$$= \int 3x^{-3} dx + \int x^{5/2} dx - \int 2x^{2/3} dx$$

$$= 3 \int x^{-3} dx + \int x^{5/2} dx - 2 \int x^{2/3} dx$$

$$= 3 \frac{x^{-2}}{-2} + 2 \frac{x^{7/2}}{7/2} - 2 \cdot 3 \frac{x^{5/3}}{5} + C$$

$$= -\frac{3}{2} x^{-2} + \frac{4}{7} x^{7/2} - \frac{6}{5} x^{5/3} + C$$

$$b) \int z \sqrt{9-z^2} dz \quad \left| \begin{array}{l} \text{See } \boxed{u = 9 - z^2} \\ \Rightarrow du = -2z dz \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \int \underbrace{\sqrt{9-z^2}}_u \underbrace{(-2z) dz}_{du}$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = -\frac{1}{3} (9-z^2)^{3/2} + C$$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{yx^2 + y^3 \cos x}{y^{1/2}} dx$ com y constante.

(2)

$$= \frac{1}{y^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} yx^2 + y^3 \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{y^{1/2}} \left(y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx + y^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right)$$

$$= y^{1/2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, dx + y^{5/2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= y^{1/2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + y^{5/2} [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= y^{1/2} \left(-\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8} \right) + y^{5/2} \underbrace{(\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2}))}_0$$

$$= -y^{1/2} \frac{\pi^3}{12}$$

P2) Determine F que satisfaga

3

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{con } F(0) = \frac{2}{3}.$$

Sol:

Primero, encontramos F

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{Defino} \\ u = 1+x^2 \\ \Rightarrow du = 2x dx \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 u^{1/2} = u^{1/2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

Entonces con $F(x) = \sqrt{1+x^2} + C$ para cualquier $C \in \mathbb{R}$ se cumple $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ahora, busquemos determinar C , y para ello imponemos la condición $F(0) = \frac{2}{3}$.

$$F(0) = \frac{2}{3}$$

(4)

$$\Rightarrow \sqrt{1+0^2} + C = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1+C = \frac{2}{3} \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

• Con $F(x) = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{3}$ se tiene lo
• pedido.

P3 $X''(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) = a(t)$

(i) Encontrar $V(t)$ sabiendo que $V(0) = \frac{1}{4}$.

Sol: $V(t)$ satisface $V'(t) = a(t)$. Así que
buscamos una primitiva de $a(t)$.

$$\begin{aligned} \int a(t) dt &= \int \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(\pi t) \cdot \pi dt \quad \left| \begin{array}{l} u = \pi t \\ \Rightarrow du = \pi dt \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(u) du = -\frac{1}{2} \cos(u) = -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + C \end{aligned}$$

Ahora, determinaremos C usando

(5)

$$V(0) = \frac{1}{4} :$$

$$V(t) = -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + C$$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \overbrace{\cos(0)}^1 + C = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{3}{4}$$

$$\text{Así que } V(t) = -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + \frac{3}{4}$$

ii) Encuentre el desplazamiento entre $t=0$ y $t=1$.

Sol. El desplazamiento corresponde a $X(1) - X(0)$. Para esto buscamos $X(t)$.

Ya que $X'(t) = V(t)$, buscamos una primitiva.

$$\int V(t) dt = \int -\frac{1}{2} \cos(\pi t) + \frac{3}{4} dt$$
$$= -\frac{1}{2} \int \cos(\pi t) dt + \frac{3}{4} \int 1 dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\cos(u)}_u \underbrace{\pi dt}_{du} + \frac{3}{4} t$$

⑥

$$= \frac{-1}{2\pi} \int \cos(u) du + \frac{3}{4}t$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \sin(u) + \frac{3}{4}t \quad \left| \begin{array}{l} \text{pero} \\ u = \pi t \end{array} \right.$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t + C.$$

Así que para alguna C ∈ ℝ,

$$X(t) = \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t + C$$

Nota: Por sí solo, esto no nos basta para conocer la posición $X(t)$. Ya que necesitamos algún otro dato para conocer la constante C .
Sin embargo, sí podemos conocer la diferencia en posición. Es decir, el desplazamiento. Ya que la constante no influye en esto.

$$\Delta x = X(1) - X(0)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\pi} \sin(\pi) + \frac{3}{4} \cdot 1 + C \right) - \left(\frac{-1}{2\pi} \sin(\pi \cdot 0) + \frac{3}{4} \cdot 0 + C \right)$$

(se cancela! por eso no influye)

$$= \frac{-1}{2\pi} \cancel{\sin(\pi)}^0 + \frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{2\pi} \cancel{\sin(0)}^0 + \frac{3}{4} \cdot 0 \right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

iii) Sabiendo que $X(0) = 5$, encuentre $X(t)$

↳ este es el dato que nos faltaba!

⑦

Recuerde que

$$X(t) = \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t + C.$$

Ahora,

$$X(0) = 5 \Rightarrow \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi \cdot 0) + \frac{3}{4} \cdot 0 + C = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 5} \therefore X(t) = \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t + 5$$

iv) demuestre que

$$a(t) + \pi^2(X(t) - 5) = \frac{3}{4}\pi^2 t.$$

Sol. Sabemos que

$$a(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) \quad \text{y} \quad X(t) = \frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t + 5.$$

luego,

$$\begin{aligned} & a(t) + \pi^2(X(t) - 5) \\ &= \underbrace{\frac{\pi}{2} \sin(\pi t)}_{a(t)} + \pi^2 \left(\underbrace{\frac{-1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4}t}_{X(t)} - 5 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin(\pi t) + \pi^2 \left(-\frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{3}{4} t \right)$$

(8)

$$= \cancel{\frac{\pi}{2} \sin(\pi t)} - \cancel{\frac{\pi}{2} \sin(\pi t)} + \frac{3\pi^2}{4} t = \frac{3}{4} \pi^2 t$$

y esto es lo que queríamos probar $\square$.