Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2020

Pauta Control 3

03/11/2020

Instrucciones:

- **Disponen de 40 minutos para el desarrollo del control y subirlo a la sección Tarea de U-cursos.**
- **Una y sólo una persona de cada grupo debe subir el archivo a U-cursos, en formato pdf.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Dé solución sólo a uno de los siguientes problemas que se plantean.**
- **Nombre a todos(as) los(as) integrantes del grupo (máximo dos personas).**

---

1. Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$.

   a) Estudie la existencia de asíntota(s) horizontal(es) de f. **(2 puntos)**

   Solución: Para determinar si la gráfica de la función f posee una asíntota horizontal debemos estudiar el límite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

   y dado que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 1 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

   tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

   Finalmente, en virtud de lo anterior podemos concluir que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal de la función f.

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

b) Determine en qué intervalos la función es creciente y en qué intervalos es decreciente. Indique los puntos máximos y mínimos de f. **(4 puntos)**

Solución: Considerando la derivada de la función f la cual es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para $x \geq 0$ y está dada por

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2},$$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

entonces

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-2x-1=0.$$

por lo cual, $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Sin embargo, como $x \geq 0$ solo es valido $x = 1+\sqrt{2}$.

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Ahora, analizando el signo de f' tenemos:

	$x \in [0, 1+\sqrt{2}[$	$x = 1+\sqrt{2}$	$x \in]1+\sqrt{2}, \infty[$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

donde $f'(1) > 0$ y $f'(3) < 0$.

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

Por lo tanto, f es creciente en $[0, 1+\sqrt{2}]$ y es decreciente en $[1+\sqrt{2}, \infty[$.

$$\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$$

Además, f alcanza máximo en $x = 1+\sqrt{2}$ y $f(0) = -1$.

Finalmente f posee punto máximo

$$\left(1+\sqrt{2},\ f(1+\sqrt{2})\right) = \left(1+\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+4}\right)$$

y el punto mínimo es $(0, -1)$

$$\boxed{\textbf{1 punto}}$$

2. En una carretera de salida de una ciudad, la velocidad de los vehículos, medida en kilómetros por hora, que transitan entre las 2 pm y las 6 pm de un día viernes, se modela mediante:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad t \in [2, 6].$$

a) Determine en qué intervalos entre las 2 pm y las 6 pm, la velocidad aumenta y en qué intervalos disminuye.

Solución:
Analizando la función v podemos notar que para $t \in [2, 6]$ es diferenciable y

$$\begin{aligned} v'(t) &= 3t^2 - 30t + 72 \\ &= 3(t^2 - 10t + 24) \\ &= 3(t-4)(t-6), \qquad t \in [2, 4] \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Luego, estudiando el signo de $v'(t)$, tenemos

	$x \in [2, 4[$	$x = 4$	$x \in]4, 6[$	$x = 6$
v'	$+$	0	$-$	0
v	$\nearrow$		$\searrow$	

donde $v'(3) > 0$ y $v'(5) < 0$.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

De esta manera podemos indicar que la velocidad de los automóviles aumenta en $[2, 4]$ y disminuye en $[4, 6]$.

$\boxed{\textbf{1 punto}}$

b) Determine las velocidades máxima y mínima que alcanzan estos vehículos y a qué hora se dan.

Solución:
De acuerdo al ítem anterior podemos indicar que:

En $t = 4$ la velocidad es máxima y está dada por $v(4) = 120 \left[\frac{\text{Km}}{\text{h}}\right]$.
Además,

$$v(2) = 100 \left[\frac{\text{Km}}{\text{h}}\right] \qquad \text{y} \qquad v(6) = 116 \left[\frac{\text{Km}}{\text{h}}\right]$$

$$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$

Así, la velocidad máxima es 120 $\left[\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}}\right]$ y se alcanza a las 4 [h], además, la velocidad mínima es de 100 $\left[\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}}\right]$ y se alcanza a las 2 [h].

$$\boxed{\textbf{1.5 puntos}}$$