Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2020

Pauta Control 2

13/10/2020

Instrucciones:

- **Disponen de 40 minutos para el desarrollo del control y subirlo a la sección Tarea de U-cursos.**
- **Una y sólo una persona de cada grupo debe subir el archivo a U-cursos, en formato pdf.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Dé solución sólo a uno de los siguientes problemas que se plantean.**
- **Nombre a todos(as) los(as) integrantes del grupo (máximo dos personas).**

---

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que $f(x) = (2x+1)^{100}$ y $g(x) = 3x^2 + x$. Además se define

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x) = \frac{f(x) + g(x)}{x^4 \cdot f(x) + 5}.$$

Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de H en el punto $(-1, H(-1))$.

Solución: La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función H en el punto $(x_0, h(x_0))$ está dada por

$$L(x) = H'(x_0)(x - x_0) + H(x_0),$$

donde $x_0 = -1$.
Ahora, consideremos

$$H(x) = \frac{f(x) + g(x)}{x^4 f(x) + 5}$$

donde $f(x) = (2x+1)^{100}$ y $g(x) = 3x^2 + x$

Para determinar el valor de $H(-1)$, determinamos $f(-1) = 1$ y $g(-1) = 2$, por lo que,

$$H(-1) = \frac{f(-1) + g(-1)}{(-1)^4 f(-1) + 5} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Además, notamos que tanto f como la función g son continuas y diferenciables en cercanias del valor $x = -1$ y

$$f'(x) = 200(2x+1)^{99} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 6x + 1.$$

Así,

$$H'(x) = \frac{[f(x)+g(x)]' \cdot (x^4 f(x) + 5) - [f(x)+g(x)] \cdot (x^4 f(x)+5)'}{(x^4 f(x)+5)^2},$$

$$\boxed{\text{1.5 puntos}}$$

tenemos,

$$H'(x) = \frac{[f'(x)+g'(x)] \cdot (x^4 f(x) + 5) - [f(x)+g(x)] \cdot (4x^3 f(x) + x^4 f'(x))}{(x^4 f(x)+5)^2}.$$

$$\boxed{\text{1.5 puntos}}$$

Luego, evaluando en $x_0 = -1$, se tiene $f'(-1) = -200$, $g'(-1) = -5$ y

$$H'(-1) = \frac{(-200-5)\cdot 6 - 3 \cdot (-4-200)}{6^2} = -\frac{103}{6}.$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función H en $(-1, \frac{1}{2})$ es

$$L(x) = -\frac{103}{6}(x+1) + \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{x^2 + x + 1}$.

   Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$, y use la aproximación afín para aproximar $f(-1{,}01)$.

   Solución: La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

   Ahora, consideremos la función $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{x^2 + x + 1}$ y $x_0 = -1$, luego, $f(x_0) = f(-1) = -1$.

$$\boxed{0.5 \text{ punto}}$$

Además, como la función f es diferenciable pues tanto el numerador como el denominador son funciones diferenciables y su función derivada está dada por

$$f'(x) = \frac{(\cos(\pi x))' \cdot (x^2 + x + 1) - \cos(\pi x) \cdot (x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\boxed{1.5 \text{ puntos}}$$

Así,

$$f'(x) = \frac{(-\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \pi) \cdot (x^2 + x + 1) - \cos(\pi x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\boxed{1.5 \text{ puntos}}$$

Evaluando,

$$f'(-1) = \frac{0 - (-1) \cdot (-1)}{1} = -1$$

$$\boxed{0.5 \text{ punto}}$$

Por lo tanto,

$$L(x) = -1 \cdot (x + 1) - 1 = -x - 2$$

$$\boxed{1 \text{ punto}}$$

Tenemos que el valor $-1{,}01$ es cercano a $x_0 = -1$, por lo tanto, usaremos $L(x)$ para aproximar (afín) el valor $f(-1{,}01)$, obteniéndose que,

$$f(-1{,}01) \approx L(-1{,}01) = 1{,}01 - 2 = -0{,}99.$$

Es decir,

$$f(-1{,}01) \approx -0{,}99$$

$$\boxed{1 \text{ punto}}$$