Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2020

Pauta Control 1

29/09/2020

Instrucciones:

- **Disponen de 40 minutos para el desarrollo del control y subirlo a la sección Tarea de U-cursos.**
- **Una y sólo una persona de cada grupo debe subir el archivo a U-cursos, en formato pdf.**
- **Justifique cada uno de sus resultados.**
- **Dé solución sólo a uno de los siguientes problemas que se plantean.**
- **Nombre a todos(as) los(as) integrantes del grupo (máximo dos personas).**

---

1. El Índice de Contaminación del Aire $C(t)$ (medido en PSI, por sus siglas en inglés) en un día de primavera en una localidad mediamente contaminada de EE.UU, está dada por la función:

$$C(t) = \frac{544}{4 + (t - 4{,}5)^2} + 28, \quad \text{para } t \in [0, 11],$$

donde t es el tiempo medido en horas, y $t = 0$ corresponde a las 7 am. Demuestre usando el teorema del valor intermedio que en algún instante entre las 10:30 y las 11:30 hubo un índice de contaminación del aire de 160 PSI (lo que significa condiciones insalubres del aire).

Solución: Dado que $t = 0$ corresponde a las 7:00 am se tiene que las 10:30 y 11:30 corresponden a $t = 3,5$ y $t = 4,5$ respectivamente. Luego, para aplicar el teorema del valor intermedio consideremos el intervalo [3,5 , 4,5]

1 punto.

Por otra parte, dado que la función C es cociente de funciones continuas en el intervalo $[0, 11]$ se concluye que C es continua en $[0, 11]$, en particular C es continua en $[3,5 , 4,5]$

2 puntos.

Además,

$$C(3,5) = \frac{544}{5} + 28 = 136,8 \qquad \text{y} \qquad C(4,5) = \frac{544}{4} + 28 = 164$$

1 punto.

donde, el índice de contaminación del aire 160 PSI, se encuentra entre las 136,8 PSI y las 164 PSI.

1 punto.

Por lo tanto, en virtud del teorema del valor intermedio existe un t_0 entre 3,5 y 4,5 tal que $C(t_0) = 160$ PSI.

Es decir, existe un instante entre las 10:30 y las 11:30 horas donde el índice de contaminación del aire es de 160 PSI.

1 punto.

2. Dada la función: $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x - 1, \;\; x \in \mathbb{R}$. Demuestre usando el teorema del valor intermedio que la función se hace cero en al menos un valor en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Solución: Queremos demostrar que existe al menos un valor $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para el cual $f(c) = 0$.

   Por un lado, notemos que la función f es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que, es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y en particular continuas en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   2 puntos.

   Por otro lado, notemos que

$$f(0) = 2 - 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

   2 puntos.

   De esta manera, 0 está entre $-1 - \frac{\pi}{2}$ y 1.

   1 punto.

   Por lo tanto, en virtud del teorema del valor intermedio, existe un c entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ tal que $f(c) = 0$.

   1 punto.