

P1 a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

①

Intersecciones

int x | $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x^2+1=0$

Como no hay solución a $x^2+1=0$,
f no interseca el eje x.

int y | $f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$: f interseca
el eje y en $(0, -\frac{1}{4})$

Asintotas

A+1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$

* OOPS!

Se me olvidaron
las asintotas
verticales!

notar que $f(-x) = f(x)$ (f par),

por lo que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

luego, $y=1$ es asintota horizontal.

crecimiento

$$f'(x) = \frac{[x^2+1]'(x^2-4) - (x^2+1)[x^2-4]'}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x[x^2-4 - (x^2+1)]}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(-5)}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{motor que} \\ f'(x)=0 \text{ em } x=0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Análise nos Sinais.

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
	$\leftarrow$	$\circ$		$\circ$	$\rightarrow$
$-10x$		+	+	-	-
$(x^2-4)^2$		+	+	+	+

$$f' \quad (+) \quad (+) \quad (-) \quad (-)$$

$$f \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \searrow$$

f crescente em $] -\infty, 0] \setminus \{-2\}$ y

f decrescente em $[0, +\infty[\setminus \{2\}$

em 0 se alcança entao um max local

$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

(*) Assintotas verticais

Candidatos, $x = \pm 2$.

$$\underline{-2} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0^+ -1

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{(x+2)(x-2)} = +\infty$$

$\begin{matrix} \nearrow (+) \\ \downarrow 0^- \end{matrix}$

③

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{(x+2)(x-2)} = +\infty$$

$\begin{matrix} \nearrow (+) \\ \downarrow 1^+ \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

$\begin{matrix} \nearrow (+) \\ \downarrow 0^- \end{matrix}$

Luego, el max local no es global debido a las asíntotas.

Concavidad

$$f'(x) = \left[\frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} \right]' = -10 \left[\frac{x}{(x^2 - 4)^2} \right]'$$

$$= -10 \frac{(x^2 - 4)^2 - x \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = 10 \frac{(x^2 - 4) - 4x^2}{(x^2 - 4)^3}$$

$$= 10 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3} = \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \rightarrow (+)$$

luego, los signos de f'' vienen dados por los signos de $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. (4)

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$		$\circ$	$\circ$	
$x-2$		$\circ$	$\circ$	
f''	$(+)$	$(-)$	$(+)$	

f $\cup \cap \cup$

f convexa en $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

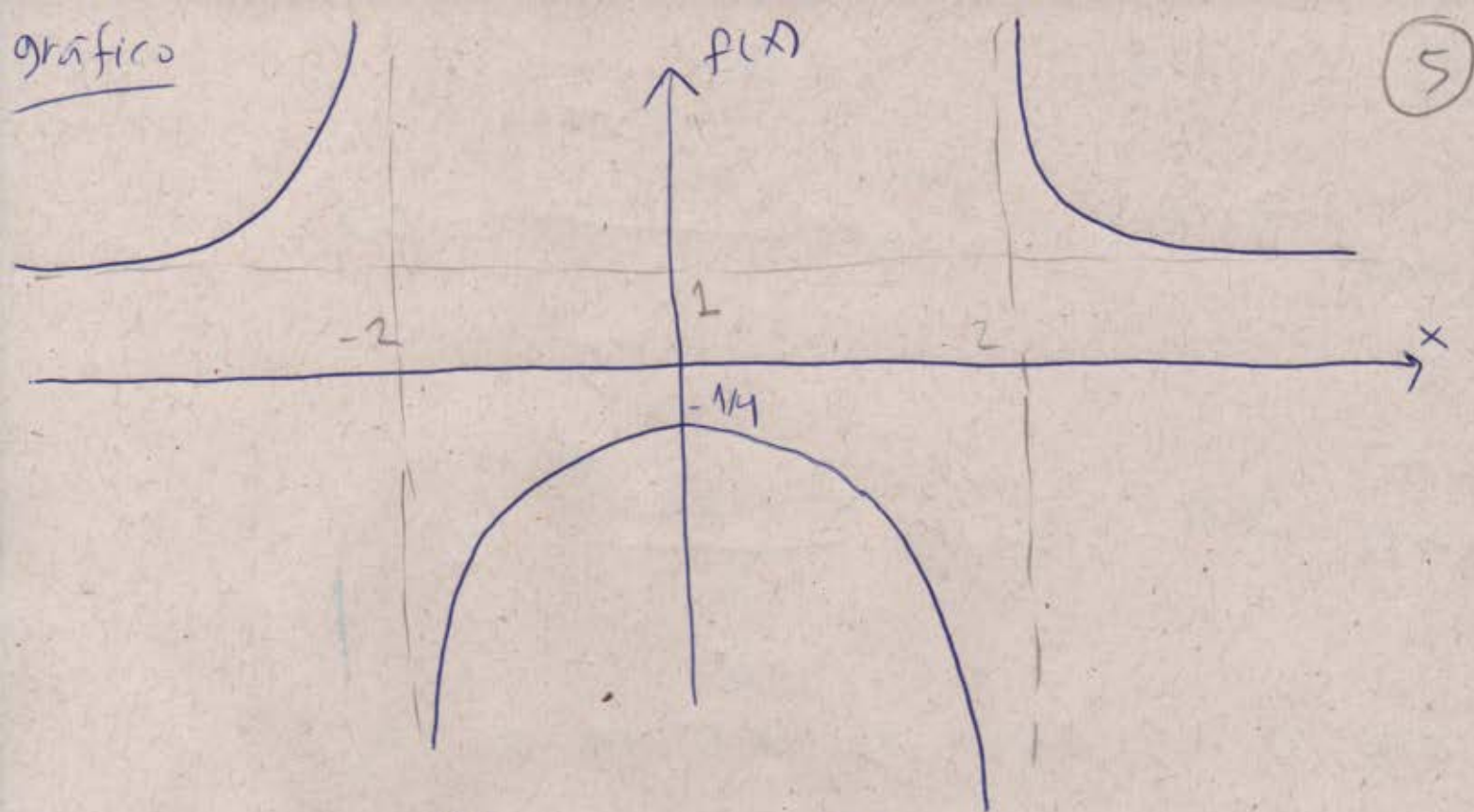
f cóncava en $] -2, 2[$

como $f'' \neq 0$ ya que $3x^2 + 4 \neq 0$ f no tiene puntos de inflexión.

Resumen:

	$-\infty$	-2	0	-2	$+\infty$
f'		$\circ$		$\circ$	
f''	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	

asíntotas



b) $g(x) = x + \frac{32}{x^2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

intersecciones

int $\mathbb{R}$ $g(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{32}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 32}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 32 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-32} \rightarrow$ esto si está bien definido!

int $\mathbb{Y}$ $g(0)$ no está definido ($0 \notin \text{Dom}(g)$)

Luego, g no interseca el eje y .

Asintotas:

A.H. $g(x) = \frac{x^3 + 32}{x^2}$ Pero $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 32}{x^2} = \pm\infty$

Luego, g no tiene asintotas horizontales

AV candidato, $x=0$.

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 32}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 32}{x^2} = \infty$$

Luego, 0 es asíntota vertical de g .
Crecimiento

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{[x^3 + 32]' x^2 - (x^3 + 32)[x^2]'}{x^4} \\ &= \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 32)}{x^4} = \frac{3x^3 - 2x^3 - 64}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 64}{x^3} = \frac{x^3 - 4^3}{x^3} = \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{x^3} \end{aligned}$$

notar que como $(x^2 + 4x + 16) \neq 0$ (por propiedades de la factorización $a^3 - b^3$), $g'(x) = 0$ solo en $x=4$. Analicemos signos.

	$-\infty$	0	4	∞	$\therefore g$ creciente en $]-\infty, 0[$ y $[4, \infty[$
$x-4$	-	0	-	+	g decreciente en $]0, 4]$.
x^3	-	0	+	+	

Adicionalmente, en $x=4$ se obtiene el mínimo local $g(4) = 4 + \frac{32}{16} = 4 + 2 = \underline{6}$

(7)

Concavidad

$$g'(x) = \left[\frac{x^3 - 64}{x^3} \right]' = \frac{[x^3 - 64]'(x^3) - (x^3 - 64)[x^3]'}{x^6}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2(x^3 - 64)}{x^6} = \frac{3x^3 - 3(x^3 - 64)}{x^4}$$

$$= \frac{64}{x^4} > 0. \text{ Luego, } g \text{ siempre es cóncava.}$$

(g no tiene puntos de inflexión)

Resumen $\leftarrow \infty \quad 0 \quad 4 \quad \infty \rightarrow$

g' + - +

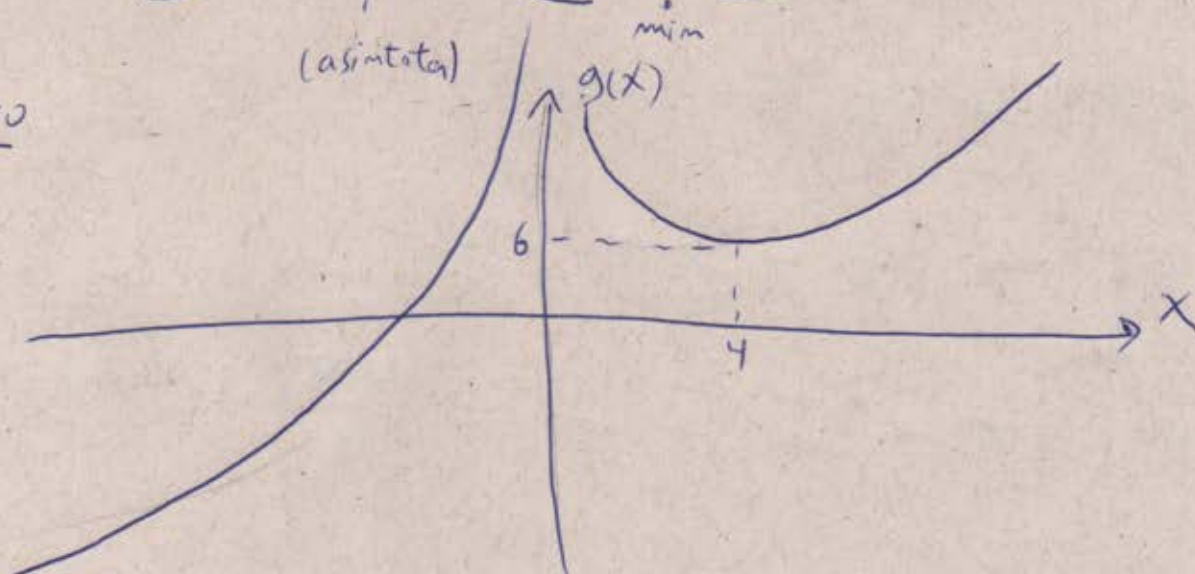
g'' + + +

g   

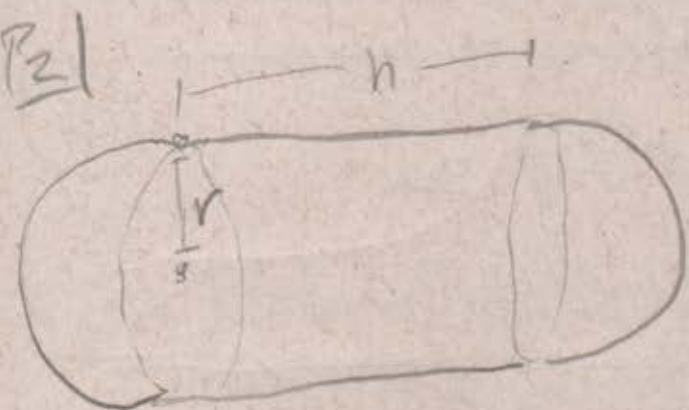
(asintota)

mín

gráfico



(8)



el volumen es 5!

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 5$

$$\Rightarrow h = \frac{5 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

Área superficial:

$$A(r, h) = A_{\text{esfera}} + A_{\text{cilindro}}$$

$$= 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

reemplazando h , obtenemos

$$A(r) = 4\pi r^2 + 2\cancel{r} \cdot \frac{5 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\cancel{r}}$$

$$= 4\pi r^2 + \frac{2}{r}(5 - \frac{4}{3}\pi r^3)$$

$$= 4\pi r^2 + \frac{10}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2$$

$$= r^2\left(4\pi - \frac{8\pi}{3}\right) + \frac{10}{r} = \frac{4\pi}{3}r^2 + \frac{10}{r}$$

(9)

obtenemos

$$A(r) = \frac{4\pi}{3} r^2 + \frac{10}{r}$$

Derivando para buscar puntos críticos

$$A'(r) = \frac{8\pi}{3} r - \frac{10}{r^2} = \frac{\frac{8\pi}{3} r^3 - 10}{r^2}$$

Así que imponiendo $A'(r) = 0$, obtenemos

$$\frac{8\pi}{3} r^3 - 10 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{5 \cdot 3}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$$

Y notamos que la expresión $\frac{8\pi}{3} r^3 - 10$ es creciente. Por lo que como el denominador de A' es siempre positivo, necesariamente en $r = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$, A' pasa de negativo a positivo.

$\Rightarrow A$ pasa de decreciente a creciente.

$\therefore r = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$ es mínimo.

P31 $E(V) = \frac{1}{V} (K(V-35)^2 + C)$ (10)

Para buscar mínimos, derivamos E .

$$E'(V) = \frac{1}{V^2} (K(V-35)^2 + C) + \frac{1}{V} (K \cdot 2(V-35))$$

$$= \frac{V 2K(V-35) - (K(V-35)^2 + C)}{V^2}$$

$$= \frac{2KV^2 - 70KV - K(V^2 - 70V + 35^2) - C}{V^2}$$

$$= \frac{\cancel{KV^2} - \cancel{70KV} - \cancel{KV^2} + \cancel{70KV} - 35^2 K - C}{V^2}$$

$$= \frac{KV^2 - (35^2 K + C)}{V^2}$$

Luego, para que $E'(V) = 0$, necesariamente,

$$KV^2 - (35^2 K + C) = 0 \Rightarrow V = \sqrt{35^2 + \frac{C}{K}}$$

(ya que $V > 0$)

Ahora, vemos que la expresión $E'(V)$ corresponde a un cociente en que el denominador es siempre positivo. Por lo que los signos de E' vienen dados por los signos de L numerador (11)
 $K V^2 - (35^2 K + C)$ pero esto es cuadrático!
 (V es la única variable)

Luego, como $K > 0$, tiene los signos de una función cuadrática conexas.
 Es decir, $\leftarrow \begin{array}{cc} + & - \\ | & | \\ r_1 & r_2 \end{array} \rightarrow$

en que r_1 y r_2 son sus raíces.

Ya que la raíz que obtuvimos es la positiva, vemos que E' pasa de $(-)$ a $(+)$
 en $V = \sqrt{35^2 + \frac{C}{K}}$.

$\Rightarrow E$ pasa de decreciente a creciente

$\Rightarrow V = \sqrt{35^2 + \frac{C}{K}}$ es un mínimo local

□