Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
2*do*. semestre de 2020

Ayudantía 5
Análisis de curva. Modelado y optimización.

23/10/2020

En este taller, abordaremos un conjunto de conceptos vistos hasta el momento, tales como, reglas de derivación, límtes para análizar la existencia de asíntotas verticales y horizontales, criterios de la primera y de la segunda derivada para estudiar la monotonía y concavidad de una función, entre otros. Todo este proceso tiene como finalidad esbozar el gráfico de una función dada. Además, aplicaremos el cálculo diferencial para resolver problemas contextualizados cuyo objetivo es la optimización de una función.

Objetivos:

1. Realiza análisis de curva para esbozar el gráfico de una función.
2. Resuelve problemas de optimización aplicando el cálculo diferencial.
3. Modela y optimiza una función de acuerdo a un contexto.

Ejercicios Propuestos

1. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones. Para dicho propósito se requiere que determine lo siguiente:

   - Intersecciones con los ejes.
   - Existencia de asíntotas verticales y horizontales.
   - Máximos y mínimos locales.
   - Intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.
   - Intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo, y puntos de inflexión.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}.$

   b) $g(x) = x + \dfrac{32}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

2. Una píldora se confecciona uniendo un casco semiesférico a cada uno de los extremos de un cilindro circular recto (sin sus bases). El volumen total de la píldora es de 5 [cm^3]. Determinar las dimensiones del cilindro que producen la mínima área superficial de la píldora.

3. La energía (por unidad de tiempo) gastada por cierta especie de perico en un vuelo horizontal, está dada por la expresión

$$E(v) = \frac{1}{v}\big(k(v-35)^2 + c\big),$$

donde v es la velocidad de vuelo del ave medida en [km/h], y donde k, c son constantes positivas. ¿Qué velocidad de vuelo del perico minimiza su gasto energético?

Problemas de desafío

1. Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje x de modo que su abscisa en el instante t es:

$$x(t) = \operatorname{sen}(2t) + \sqrt{3}\cos(2t).$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

2. Sea $f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)}$.

   a) Encuentre los puntos sobre la gráfica de la función f tales que la recta tangente sea horizontal.

   b) Realice el análisis de curva para representar gráficamente a f.