Funciones Fantásticas y Dónde Encontrarlas

Benja Vera

Octubre 2020

En este documento, vamos a exponer una colección de funciones que, en el estudio del cálculo, resultan bastante exóticas y difíciles de manejar. No obstante, funciones como estas fundamentan el estudio del Análisis Real. El cual puede ser entendido como el intento por comprender y generalizar los principios que construyen al Cálculo. Por lo tanto, hay algo que aprender aunque sea solo de conocerlas.

Ejemplo 1: La Parte Entera

Iniciamos nuestra recopilación con un ejemplo no *tan* exótico. En general esta se introduce como una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ que asigna a cada real *el mayor entero que es menor o igual a x*. De modo que por ejemplo $f(4.1) = 4$ puesto que no hay entero mayor a 4 que sea menor a 4.1. Del mismo modo $f(7) = 7$ y (cuidado) $f(-1.2) = -2$ puesto que $-1 > -1.2$. Llamamos a esta función *la parte entera de x* y normalmente se denota $\lfloor x \rfloor$.

Comentario adicional: El hecho de que esta función está bien definida viene garantizado por el axioma del supremo. Para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, consideramos el conjunto $S_x = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$. Vemos que este conjunto es no vacío y acotado superiormente por x. Luego, debe poseer supremo. Este supremo es el que definimos como la parte entera de x. Así, calza con la definición de *el mayor de los enteros menores a x*.

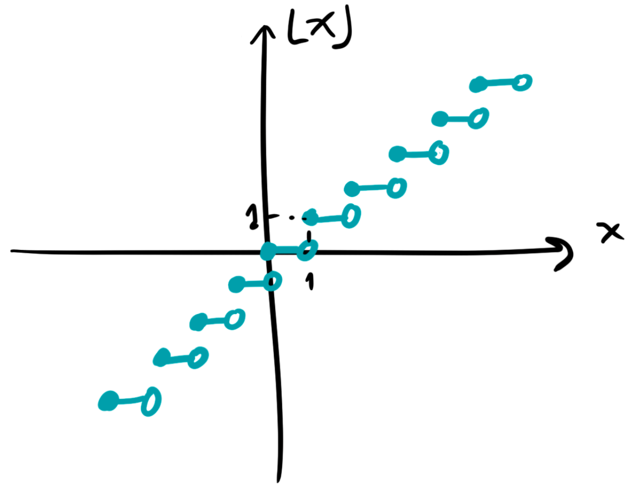

Figura 1: Gráfico de la función $\lfloor x \rfloor$

En base a esta función, también podemos definir la *parte decimal* de x como la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$g(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Nótese que siempre corresponde a un número entre 0 y 1 y tiene el mismo comportamiento que esperaríamos de la parte decimal de un número.

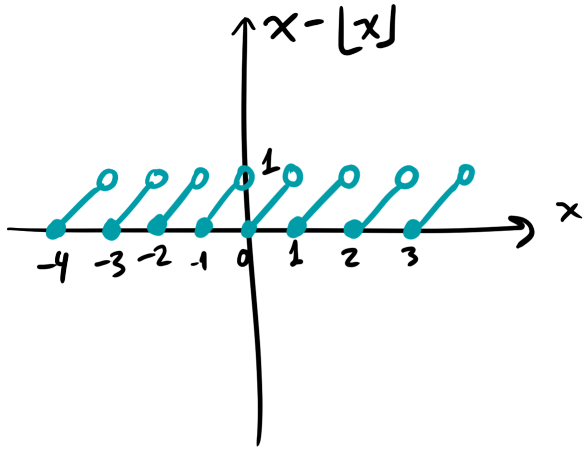

Figura 2: Gráfico de la función $x - \lfloor x \rfloor$

Ejemplo 2: Función de Dirichlet

Esta función resultaría imposible de dibujar. Puesto que posee infinitos saltos en su gráfica. Su regla de asignación viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ya que todo $x \in \mathbb{R}$ es necesariamente racional o irracional (y nunca ambas), esta función queda bien definida, y su rareza consiste en que no es continua en ningún punto de su dominio. Funciones como esta nos dan una impresión de la enorme cantidad (y variedad!) de funciones que podemos inventar.

Ejemplo 3: Función de Thomae

La Función de Thomae es una variante de la función de Dirichlet anterior. Su regla de asignación viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ es fracción reducida } (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Esta función también envía a los irracionales a 0, pero a los racionales les asigna una especie de puntaje de qué tan "simples" son. Ya que cuando una fracción está reducida, si tiene denominador alto, la podemos interpretar como una fracción *complicada*, como $\frac{73}{245}$ o $\frac{9}{41}$. Mientras que $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{4}$ son fracciones que tienen denominador bajo al ser reducidas. Por lo tanto, el $\frac{1}{q}$ asegura que las fracciones más *complicadas* quedan más cerca de cero. Donde son enviados los irracionales.

Nuestra intuición nos diría que los irracionales se ubican en la recta *cerca* de fracciones complejas. Y parte de esta intuición es reflejada en el hecho de que **esta función es continua en los irracionales y discontinua en los racionales**.

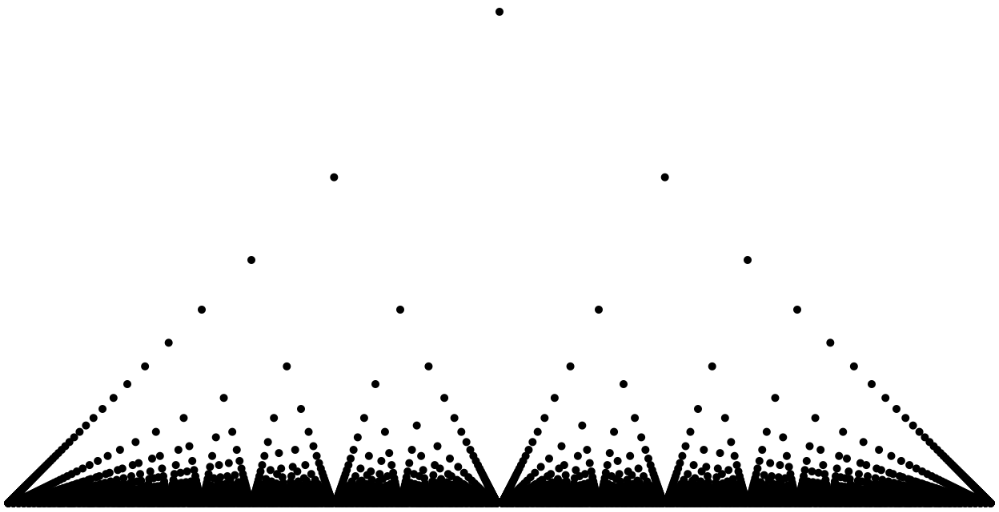

Figura 3: *Gráfico* de la función de Thomae

Ejemplo 4: Función de Weierstrass

Hemos visto que con funciones infinitamente discontinuas se pueden lograr varias cosas. Pero no requerimos de salir del mundo de las funciones continuas para encontrar criaturas exóticas. La Función de Weierstrass es uno de varios ejemplos de una curva fractal. Es decir, una curva en que una zona es similar a la curva completa. A continuación presentamos su gráfico. Nótese que la curva se reproduce al hacer zoom sobre ella:

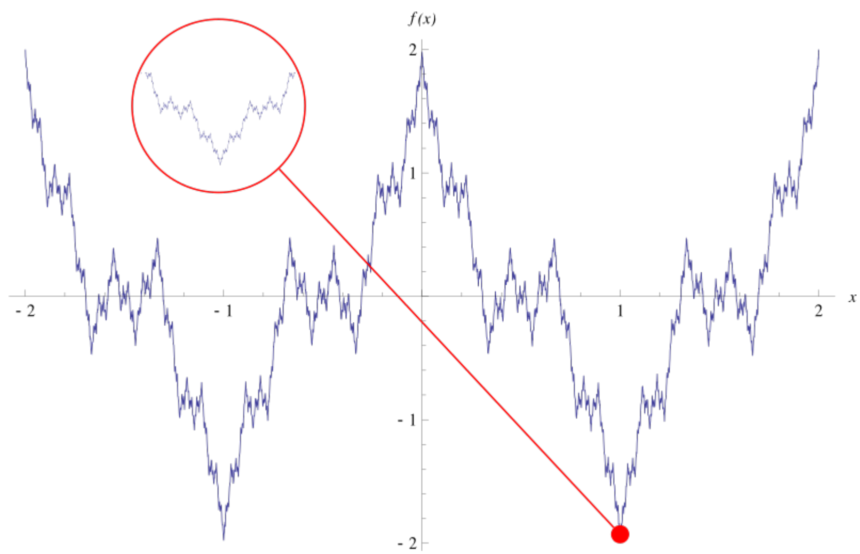

Figura 4: Función de Weierstrass

Esta función es continua en todos los reales. Sin embargo, no es diferenciable en ninguno. En otras palabras, es una función *infinitamente puntiaguda.* Su regla de asignación viene dada en el enlace de arriba. Sin embargo, viene formulada en términos de una Serie de Fourier. Por lo que no es muy comprensible a primera vista.

Ejemplo 5: Función de Cantor

A continuación, presentamos el gráfico de la llamada Función de Cantor, también conocida como la Escalera del Diablo:

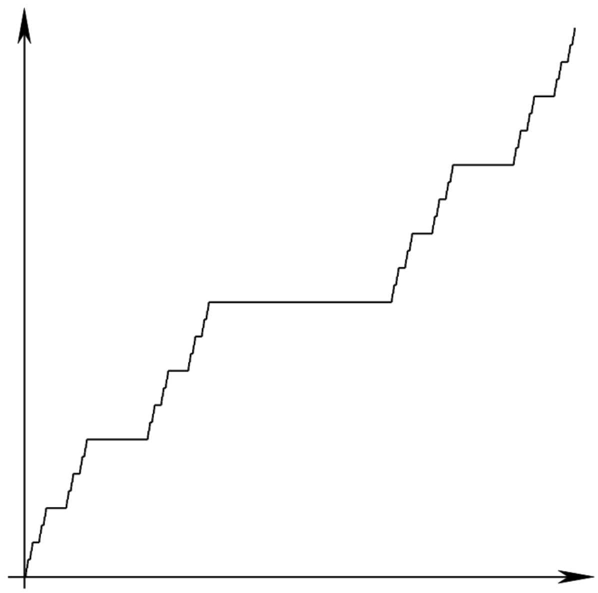

Figura 5: Función de Cantor

La construcción de esta función involucra un conjunto fractal llamado Conjunto de Cantor, una de cuyas partes tiene la misma forma que el conjunto completo. Y esta función refleja su misma forma, nótese que el primer tercio del gráfico de la función puede ser ampliado para obtener el gráfico completo.