Reglas de Derivación I

Benja Vera

Octubre 2020

En este documento, vamos a demostrar algunas de las reglas de derivación que hemos estado utilizando a lo largo del semestre. Nuestro objetivo por el momento será probar la regla de las potencias, la suma, el producto y la derivada de la función $\operatorname{sen}(x)$. Quedarán pendientes la regla de la cadena y el cuociente ya que requieren ciertas herramientas de continuidad y diferenciabilidad en que por el momento no merece la pena adentrarnos. En cuanto a prerrequisitos para este documento, conviene tener presentes las propiedades del álgebra de límites, ya que las utilizaremos bastante.

1 Recordemos la definición

Para demostrar propiedades fundamentales como estas, siempre recurrimos a las definiciones ya que corresponden a un punto en que no tenemos otros elementos en los cuales apoyarnos. Por lo que siempre merece la pena recordar la definición de diferenciabilidad.

Decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* o *derivable* en un punto $x_0 \in A$ si el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe. A tal límite le llamamos **derivada de f en el punto** x_0 y lo denotamos $f'(x_0)$

Nota: Se puede demostrar (no lo haremos en este documento) que toda función derivable es una función continua. Sin embargo, existen funciones continuas que no son derivables. Por lo tanto te recomiendo pensar en las derivabilidad como una condición más restrictiva que la continuidad. Una propiedad que solo es satisfecha por las funciones más bonitas.

1.1 Ejemplos:

- Se puede comprobar que la función $|x|$ es derivable en todo punto de su dominio salvo el cero. Mediante límites laterales, se comprueba que en cero el límite no existe, ya que ambos límites dan números distintos.
- Podemos también verificar de esta forma que la derivada de las funciones constantes $f(x) = c$ es igual a cero en todo punto. Ya que las expresiones $f(x+h)$ y $f(x)$ son idénticas. Por lo que el numerador es siempre cero.

2 Regla de la suma

Como buen primer paso vamos a probar la regla de la suma, que dice que si f y g son funciones derivables en x, entonces $(f+g)$ es derivable y su derivada es la suma entre $f'(x)$ y $g'(x)$. En otras palabras: $(f+g)' = f'+g'$

Recordando la definición, lo que queremos comprobar es que $(f+g)$ es derivable, es decir, el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

existe. Pero lo podemos manipular de la siguiente manera:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right)$$

Y ya que f y g son derivables, los límites de ambas fracciones existen y por lo tanto, aplicando álgebra de límites:

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Luego, el límite existe y es igual a $f'(x)+g'(x)$ $\square$

3 Regla de las Potencias

A continuación, abordaremos la demostración de la regla de las potencias. Que dice que para $f(x) = x^n$, su derivada existe en todo punto y es igual a $f'(x) = nx^{n-1}$. Para esto, el límite que buscamos que exista es

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Y nos gustaría reducir esto con la esperanza de llegar a nx^{n-1}. No obstante, si lo intentamos, nos vamos a dar cuenta de que el término $(x+h)^n$ dificulta el cálculo bastante. Como buena costumbre en matemáticas, probemos explorando casos más simples primero para encontrar un patrón y generalizarlo.

Caso $n = 2$

El límite buscado nos queda de la siguiente forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

En que la resta nos permitió eliminar x^2 dejando solo términos que involucran h. Debido a esto, fuimos capaces de factorizar h y cancelar con el denominador, dejando un límite de función continua en 0 que pudimos evaluar. Pero nótese que solo pudimos calcular esto porque conocíamos la expansión de $(x+h)^2$. Pero generalizarla para n puede resultar bastante desafiante.

Haremos el caso $n = 3$ y esta vez nos concentraremos en saber cómo apareció la derivada anterior en el proceso de calcular el límite.

Caso $n = 3$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Observación: Al realizar la expansión del binomio $(x+h)^n$ obtenemos siempre una suma de términos del tipo cx^ph^q donde c es alguna constante y las potencias p y q suman n.[1] Sin embargo (véase la primera igualdad de arriba) siempre el primer término x^n se va a cancelar ya que está siendo restado en el límite. Luego, todos los otros términos son factores de h (segunda igualdad). Por lo que al cancelar con el h del denominador (tercera igualdad) nos quedará un resto de términos en que al evaluar $h = 0$ solo sobrevivirá aquel término que originalmente venía acompañado de h en la expansión del binomio.

¿Y qué término venía acompañado de h? Si la potencia de h es 1, ya que las potencias deben sumar n, necesariamente la potencia de x es $n-1$. Luego, **la derivada será cx^{n-1} donde c es el coeficiente que multiplica $x^{n-1}h$ en la expansión de $(x+h)^n$.**

¿Cuál será este coeficiente c? Ya que al multiplicar el binomio se desarrollan todas las combinaciones posibles, el coeficiente vendrá dado por la cantidad de veces que es posible obtener $x^{n-1}h$ en el producto $(x+h)(x+h)\dots(x+h)$. Y este corresponde por definición al coeficiente binomial

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

Por lo tanto $f'(x) = nx^{n-1}$. $\square$

3.1 Nota adicional

El desafío de calcular ciertos términos de un binomio como este no es poco común en matemáticas. Y mediante un razonamiento combinatorial semejante al que acabamos de hacer, se puede precisar aún más la expansión de $(x+h)^n$ para obtener una forma exacta:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

Esto se conoce como Teorema del Binomio o Binomio de Newton. Y lo que acabamos de hacer es dar la intuición de por qué se cumple y utilizar uno de sus términos para obtener la derivada que buscábamos.

[1] Esto se debe a que cuando hacemos el producto $(x+h)(x+h)\dots(x+h)$, la multiplicación de todas las combinaciones posibles siempre involucra una multiplicación de n términos de los cuales algunos serán x y otros serán h. Y la constante c viene dada por la cantidad de veces que podemos obtener una combinación dada de potencias.

4 Derivadas Trigonométricas

Ya que prácticamente todas las funciones trigonométricas pueden ser escritas en base a $\operatorname{sen}(x)$ (incluso $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$), nos bastaría con aprender a derivar esta función para poder deducir las otras en base al resto de las reglas de derivación.

Para ello, debemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

Y para calcular esto, recordaremos la identidad trigonométrica de la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

Así, el límite nos queda de la siguiente forma:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen}(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right)$$

La manipulación algebraica que hicimos para obtener el lado derecho parecerá arbitraria a primera vista, pero ya que x no es la variable sobre la cual estamos tomando límites, esta era la única forma que teníamos de aislarla para dejar solo expresiones que involucran h. Por lo que hacer esto cobra algo de sentido cuando pensamos en que ahora nos basta con conocer los límites de $\frac{\cos(h)-1}{h}$ y $\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$ cuando $h \to 0$.

Nota: Viendo estos límites, puede que utilizar la regla de L'Hôpital no parezca una mala idea. Pero debemos recordar que estamos queriendo calcular derivadas trigonométricas en un principio. Por lo que utilizarlas para calcular estos límites sería circular.

Utilizando Teorema del Sándwich y Álgebra de Límites (vease el video de LMS Academia sobre el tema) se puede demostrar que ambos límites existen, el primer límite es 0 y el segundo es 1. De modo que por álgebra de límites, la derivada que estamos buscando es

$$\operatorname{sen}(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = \cos(x)$$

De modo que concluimos que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$ $\square$

5 Regla del Producto

Debemos probar que $(fg)' = f'g + fg'$. Es decir, queremos calcular el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Esto nos resulta más complejo que la manipulación que hicimos con el límite de la suma ya que no es fácil ver cómo podemos aislar alguno de los límites correspondientes a las derivadas de f o g. Y quisiéramos hacer eso para utilizar la hipótesis de que ambas son derivables, ya que esos son los límites que sabemos que existen.

El *truco* consiste en sumar un 0 conveniente en el denominador que nos permita factorizar para juntar a $f(x+h)$ con $f(x)$. Esto lo hacemos como sigue:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Aquí, utilizamos álgebra de límites para concluir que esto equivale a $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, que es lo que buscamos. $\square$