P1| calcule la primera derivada de las sgtes funciones: (1)

a) $g(x) = \dfrac{(x^2+x)\sqrt[3]{sen(x)}}{1+x+x^2}$

$$g(x) = \frac{\left[(x^2+x)\sqrt[3]{sen(x)}\right]'(1+x+x^2) - (x^2+x)\sqrt[3]{sen(x)}\left[1+x+x^2\right]'}{(1+x+x^2)^2}$$

notar que

- $[1+x+x^2]' = 1+2x$
- $\left[(x^2+x)\sqrt[3]{sen(x)}\right]' = [x^2+x]'\sqrt[3]{sen(x)} + (x^2+x)\left[\sqrt[3]{sen(x)}\right]'$

$$= (2x+1)\sqrt[3]{sen(x)} + (x^2+x)\frac{1}{3}(sen(x))^{-2/3} \cdot cos(x)$$

Luego,

$$g'(x) = \frac{\left[(2x+1)\sqrt[3]{sen(x)} + (x^2+x)\frac{1}{3}(sen(x))^{-2/3}cos(x)\right](1+x+x^2) - (x^2+x)\sqrt[3]{sen(x)}(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

b) $h(x) = \dfrac{cos^4(x) - sen^4(x)}{cos(x)+sen(x)}$

notar que $\dfrac{cos^4(x) - sen^4(x)}{cos(x)+sen(x)} = \dfrac{\overbrace{(cos^2(x)+sen^2(x))}^{1}(cos^2(x)-sen^2(x))}{cos(x)+sen(x)}$

$$= \frac{cos^2(x)-sen^2(x)}{cos(x)+sen(x)} = \frac{\cancel{(cos(x)+sen(x))}(cos(x)-sen(x))}{\cancel{cos(x)+sen(x)}} = cos(x) - sen(x)$$

luego,

$$h'(x) = \left[\frac{\cos^4(x) - sen^4(x)}{\cos(x) + sen(x)}\right]' = \left[\cos(x) - sen(x)\right]' = -sen(x) - \cos(x)$$

$$= -(sen(x) + \cos(x))$$

c) $$I(x) = \frac{(x+1)^3 (x^2+1)^3 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)}{(x^3+x^2+x+1)^3 (x-1)^2}$$

Notar que si $P(x) = x^3+x^2+x+1$, entonces $P(-1) = -1+1-1+1 = 0$.

Luego, $P(x)$ factorizable por $(x+1)$.

Dividiendo:

$$(x^3+x^2+x+1) : (x+1) = x^2+1$$
$$\underline{-(x^3+x^2)}$$
$$0 + x + 1$$
$$\underline{x+1}$$
$$0$$

$\therefore P(x) = (x+1)(x^2+1)$.

Así,

$$I(x) = \frac{\cancel{(x+1)^3}\cancel{(x^2+1)^3} \operatorname{arcsen}(1/x)}{\cancel{(x+1)^3}\cancel{(x^2+1)^3}(x-1)^2} = \frac{\operatorname{arcsen}(1/x)}{(x-1)^2}$$

Con lo que

$$I'(x) = \left[\frac{\operatorname{arcsen}(1/x)}{(x-1)^2}\right]' = \frac{[\operatorname{arcsen}(1/x)]'(x-1)^2 - \operatorname{arcsen}(1/x)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4}$$

En que

- $[(x-1)^2]' = 2(x-1)\cdot 1$
- $[\operatorname{arcsen}(1/x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]' = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-(1/x)^2}}$

P2 calcule los sgtes límites

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3-2x^2+x-1}{7x^3-x^2+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3+2/x+1/x^2-1/x^3)}{x^3(7-1/x+5/x^3)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\cancel{2/x}^{\to0}+\cancel{1/x^2}^{\to0}-\cancel{1/x^3}^{\to0}}{7-\cancel{1/x}^{\to0}+\cancel{5/x^3}^{\to0}}=\boxed{\frac{3}{7}}$

b) $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)\cdot\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x((1+\cancel{x^2})-\cancel{x^2})}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2(1/x^2+1)}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\sqrt{1/x^2+1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\cancel{1/x^2}^{\to0}+1}}$

$=\boxed{1/2}$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x\,sen(x)}$$

Notamos que cuando $x\to 0$, $sen(x)-x\to 0$ y $x\,sen(x)\to 0$. Luego, aplicando r. de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x\,sen(x)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[sen(x)-x]'}{[x\,sen(x)]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}$$

Notamos que cuando $x\to 0$, $\cos(x)-1\to 0$ y $sen(x)+x\cos(x)\to 0$. Luego, aplicando r. de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\cos(x)-1]'}{[sen(x)+x\cos(x)]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{\cos(x)+(\cos(x)-x\,sen(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2\cos(x)-x\,sen(x)}$$

cuando $x\to 0$, $-sen(x)\to 0$ y $2\cos(x)-x\,sen(x)\to 2\cos(0)$
$=1\neq 0$.

Por álgebra de límites, el límite existe y es igual a cero. (5)

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=0.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$$

Notar que cuando $x\to 0$, $1-\cos(x^2)\to 1-\cos(0)=0$ y $x^4\to 0$. Aplicando r. de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(x^2)]'}{[x^4]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)\cdot\cancel{2x}}{\cancel{4}_{2}\,x^{\cancel{3}\,2}}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{2x^2}$$

Cuando $x\to 0$, $sen(x^2)\to 0$ y $x^2\to 0$. Por lo que aplicando r. de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{2x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[sen(x^2)]'}{[2x^2]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)\cdot\cancel{2x}}{\cancel{4}_{2}\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{2}=\frac{1}{2}$$

luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\frac{1}{2}$$

P3 cuando $R = 3_{[m]}$ $R'_{(t)} = 50$ $[cm/s]$ ⑥

sabemos $A(t) = \pi R^2(t)$ luego,

$$A'(t) = \pi \cdot 2R(t) \cdot R'(t).$$

buscamos $A'(t)$ cuando $R = 3[m] = 300[cm]$ y $R'(t) = 50\ [cm/s]$. Entonces,

$$A'(t) = 2\pi \cdot 300[cm] \cdot 50\ [cm/s]$$

$$= 3000\pi\ [cm^2/s] \ //$$