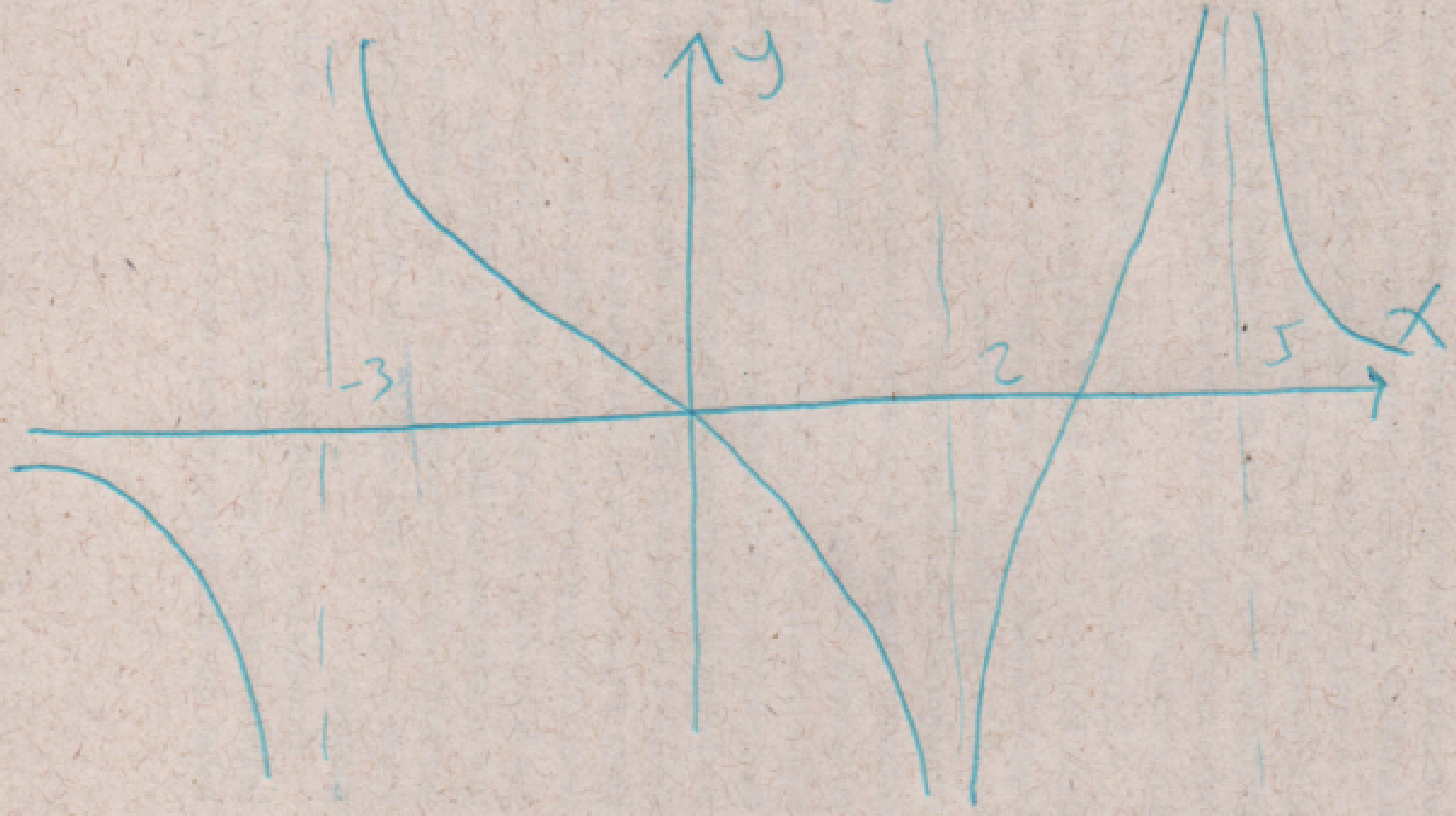
Taller 1

P1) El siguiente dibujo representa el gráfico de una función $f: \mathbb{R}\setminus\{-3,2,5\} \to \mathbb{R}$



a) indique los valores donde f es continua

A partir del gráfico, f continua en

$]-\infty,-3[\ \cup\ ]-3,2[\ \cup\ ]2,5[\ \cup\ ]5,\infty[.$

b) Encuentre límites laterales en los puntos $-3, 2, 5$.

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \infty$

c) Encuentre las ecuaciones de las asintotas verticales de f. ②

tenemos las asintotas $x=-3$, $x=2$ y $x=5$.

P2

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ b) $g(x)=\dfrac{3}{x^2+2x+1}$

c) $h(x)=\dfrac{(1-x)(x+2)}{x^3+3x^2-4x}$

• Dominio:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow dom(f)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

b) $g(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow dom(g)=\mathbb{R}-\{-1\}$

c) $h(x)=\dfrac{(1-x)(x+2)}{x(x^2+3x-4)}=\dfrac{(1-x)(x+2)}{x(x+4)(x-1)}$

$\Rightarrow dom(h)=\mathbb{R}-\{0,1,-4\}$

Limites laterales en los puntos que no pertenecen al dominio

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

$\underline{-2|}$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{\overset{(+)}{x^2}}{\underbrace{(x+2)}_{(-)}\underbrace{(x-2)}_{(-)}}$$

la expresión es positiva conforme $x \to -2^-$ y $x^2 \to 4 \neq 0$. Por lo que

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\overset{(+)}{x^2}}{\underbrace{(x+2)}_{(+)}\underbrace{(x-2)}_{(-)}}$$

La expresión es negativa conforme $x \to -2^+$ y $x^2 \to 4 \neq 0$ por lo que

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{(+)}{x^2}}{\underset{(+)}{(x+2)}\underset{(-)}{(x-2)}}$$

la expresión es negativa conforme $x\to 2^-$

y $x^2 \to 4 \neq 0 \therefore \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{(+)}{x^2}}{\underset{(+)}{(x+2)}\underset{(+)}{(x-2)}}$$

la expresión es positiva conforme $x\to 2^+$

y $x^2 \to 4 \neq 0 \therefore \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

b) $g(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ / calculamos límites laterales en $x=-1$

notar que el numerador es siempre positivo (distinto de 0)

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\overset{(+)}{3}}{\underset{(+)}{(x+1)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{3^{\to (+)}}{(x+1)^2_{\to (+)}} = \infty$$ (5)

c) $$h(x) = \frac{(1-x)(x+2)}{x(x+4)(x-1)}$$

1] Notamos que

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\overset{(-)}{\cancel{(1-x)}}(x+2)}{x(x+4)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x+2)}{x(x+4)}$$

y la función $\frac{-(x+2)}{x(x+4)}$ corresponde a un cuociente entre funciones continuas en 1 y cuyo denominador no tiende a cero cuando $x \to 1$. luego, $\frac{-(x+2)}{x(x+4)}$ es continua en 1 (por algebra de límites)

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{-(x+2)}{x(x+4)} = \frac{-(1+2)}{1(1+4)} = \frac{-3}{5}.$$

Por lo tanto, ambos límites laterales existen y valen $\frac{-3}{5}$.

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \frac{-3}{5} = \lim_{x \to 1^+} h(x)$$

0|

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{-(x+2)}^{(-)\ (\neq 0)}}{\underbrace{x}_{(+)}\underbrace{(x+4)}_{(+)}}$$

la expresión es negativa cuando $x \to 0^+$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{-(x+2)}^{(-)}}{\underbrace{x}_{(-)}\underbrace{(x+4)}_{(+)}}$$

la expresión es positiva cuando $x \to 0^-$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} h(x) = \infty$$

-4|

$$\lim_{x\to -4^+} h(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{\overbrace{-(x+2)}^{(+)}}{\underbrace{x}_{(-)}\underbrace{(x+4)}_{(+)}}$$

la expresión es negativa cuando $x \to -4^+$

$$\therefore \lim_{x\to -4^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -4^-} h(x) = \lim_{x \to -4^-} \frac{\overset{(+)}{-(x+2)}}{\underset{(-)}{x}\underset{(-)}{(x+4)}}$$

la expresión es positiva cuando $x \to -4^-$

$$\therefore \lim_{x \to -4^-} h(x) = +\infty$$

las asíntotas verticales son:

$f \rfloor$ $x = -2$ | $x = 2$

$g \rfloor$ $x = -1$

$h \rfloor$ $x = 0$ | $x = -4$

P3 sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} & x < -2 \\ 2x-2 & -2 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x-2} & x > 0 \end{cases}$$

a) Justifique por qué g es continua en los intervalos abiertos $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$ y $]2,\infty[$.

En $]-\infty,-2[$, la función $g(x)$ equivale a $\frac{x-1}{x+2}$. que es un cuociente entre funciones continuas en $\mathbb{R}$. Adicionalmente, $x+2 \neq 0$ si $x \in]-\infty,-2[$. De modo que $\frac{x-1}{x+2}$ es continua en $]-\infty,-2[$.

En $]-2,2[$, la función $g(x)$ equivale a $2x-2$. La cual es una recta y por lo tanto es continua en su dominio

Em $]2,\infty[$, $g(x)$ equivale a (9)

$\frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}$. Que es cociente entre un polinomio y una recta que no se hace cero en el intervalo. Por lo tanto, $g(x)$ continua en $]2,\infty[$.

b) calcule $g(-2)$ y $g(2)$

$g(-2) = 2(-2)-2 = -4-2 = -6$

$\rightarrow -2 \in [-2,2[$

$g(2) = 2$

caso $x=2$

c) Demuestre que g continua en $x=2$.

Para esto, tendría que cumplirse

$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 2$

calculemos los límites laterales

$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-2) = 4-2 = 2$

continuidad

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x^2-3x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}}$$

$x \neq 2$

$$= \lim_{x\to 2^+} x(x-1) = 2(2-1) = 2$$

(continuidad)

como ambos límites laterales existen y son iguales a 2, concluimos

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 2 = g(2) \Rightarrow$$ g continua en 2 $\square$

d) calcule $\lim_{x\to -2^-} g(x)$.

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\overset{(-)}{x-1}}{\underset{(-)}{x+2}}$$

→ positiva y $x+2 \to 0$, $x-1 \to -3 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to -2^-} g(x) = \infty$$

P4]

$$P(t) = \cancel{8}\,100\left(\frac{t^3+100t+1000}{t^3+200t+1000}\right)$$

Notamos que $P(t)$ es un producto entre un número y un cuociente de funciones polinomiales (continuas) en que, ya que para $t \in [0,10]$

$\underset{(+)}{t^3}+\underset{(+)}{200t}+\underset{(+)}{1000} > 0$, el denominador no se hace cero. Por lo tanto, $P(t)$ continua en $[0,10]$ (intervalo cerrado)

Notamos además que $P(0) = 100\cdot\dfrac{\cancel{1000}^{\,1}}{\cancel{1000}}$

$= 100$ y $P(10) = 100\cdot\dfrac{10^3+100\cdot 10+1000}{10^3+200\cdot 10+1000}$

$= 100\cdot\dfrac{\cancel{3000}^{\,3/4}}{\cancel{4000}} = 25\cdot 3 = 75$

Por lo que, como $75 < 87 < 100$, existe $\bar{t}\in[0,10]$ en que $P(\bar{t}) = 87$ $\square$