Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Resueltos matrices y sistemas de ec.

1. * Una empresa ofrece 4 tipos de productos distintos, P_1, P_2, P_3 y P_4.

   P_1 requiere 10 hrs de diseño, 4 de armado, 5 de pulido y 2 de detalles.

   P_2 requiere 2 hrs de diseño, 3 de armado, 1 de pulido y 1 de detalles.

   P_3 requiere 1 hrs de diseño, 2 de armado, 0 de pulido y 1 de detalles.

   P_4 requiere 5 hrs de diseño, 3 de armado, 1 de pulido y 4 de detalles.

   La empresa dispone de los siguientes recursos: 610 hrs de diseño, 334 de armado, 288 de pulido y 172 hrs para detalles.

   (a) Determine el nivel de producción de cada producto de modo de utilizar todos los recursos.

   (b) Si las hora de diseño, armado, pulido y arreglo de detalles cuestan, \$10, \$20, \$12 y \$5 respectivamente, calcular (usando matrices) el costo por unidad para cada producto P_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

   (c) Hay más demanda del producto P_4 que por el producto P_1, por lo que se impone el siguiente nivel de producción; 20 de P_1, 20 de P_2, 5 de P_3 y 25 de P_4. Determine usando matrices si es necesario adquirir más recursos.

Solución. a) El nivel de producción se refiere a la cantidad de productos que se hacen. Digamos que x, y, z, w son la cantidad de prductos P_1, P_2, P_3 y P_4 que se producen respectivamente. Con esto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
10x + 2y + z + 5w &= 610 \\
4x + 3y + 2z + 3w &= 334 \\
5x + y + w &= 288 \\
2x + y + z + 4w &= 172
\end{aligned}$$

Este sistema lo podemos escribir en la forma $Av = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 610 \\ 334 \\ 288 \\ 172 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones no hay problemas con trabajar la matriz ampliada del sistema y escalonarla.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 2 & 1 & 5 & 610 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 334 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 288 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 172 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 - f_4]{-(f_2 - 2f_4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 1 & 0 & 1 & 438 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 288 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 172 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4 + f_1]{\substack{f_2 + f_1 \\ f_3 + f_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 1 & 448 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 298 \\ 2 & 0 & 1 & 9 & 182 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}(f_1 - f_3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -10 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 298 \\ 2 & 0 & 1 & 9 & 182 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}(f_1 - f_3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -10 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 298 \\ 2 & 0 & 1 & 9 & 182 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{6}(f_3 - f_1)]{-(f_3 - 5f_1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 82 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \leftrightarrow f_4]{\substack{f_2 + 5f_3 \\ f_4 - 9f_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) .$$

Concluímos que se necesitan hacer 50, 30, 10 y 8 productos P_1, P_2, P_3 y P_4 respectivamente para utilizar la totalidad de los recursos disponibles.

Solución. b) ordenamos la información como sigue: (sabemos que tiene que estar de esa forma por cómo se multiplican matrices. Por ejemplo, un producto P_1 cuesta $x = 10 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 12 + 2 \cdot 5$, lo que literalmente la multiplicación entre la primera fila y el vector que resume los precios. Tambiéan por si han visto en otros lados, esto corresponde al producto punto entre esta fila y esa columna.)

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ,$$

donde x, y, z y w son los precios unitarios en \$ de P_1, P_2, P_3 y P_4 respectivamente. Multiplicando obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 97 \\ 62 \\ 142 \end{pmatrix}$$

Solución. c) Notamos que para calcular lo pedido usando matrices basta notar que tenemos que realizar la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370 \\ 225 \\ 145 \\ 165 \end{pmatrix} ,$$

de donde concluímos que no se necesitan más que los recursos ya disponibles para poder responder a este nivel de producción.

2. Considere las matrices cuadradas $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

   (a) A es invertible si y sólo si AA^t es invertible.

   (b) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$. Si A es invertible, utilice las condiciones dadas para calcular las matrices A y B.

Solución. a) Supongamos primero que A es invertible. Por definición esto nos dice que existe $A^{-1} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Además sabemos que A^t también es invertible y que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(Si A es invertible entonces $A^{-1}A = I$. Tomando traspuesta a ambos lados obtenemos que $A^t(A^{-1})^t = I^t = I$. Si repetimos lo mismo para $AA^{-1} = I$ obtenemos que $(A^{-1})^t A^t = I$, es decir, para A^t existe una matriz que al multiplicarla por izquierda o derecha nos da la identidad, por lo que A^t es invertible. La segunda igualdad demustrenla como ejercicio.)

Dicho esto vemos que AA^t es invertible por definición; la matriz $B = (A^t)^{-1}A^{-1}$ es tal que $AA^tB = BAA^t = I$. (Para demostrar que algo es invertible por definición, debemos asegurar la existencia de la matriz inversa, que acá se llama B, que existe pues A^{-1} y $(A^t)^{-1}$ existen.)

Supongamos ahora que AA^t es invertible, entonces, por definición de ser invertible, existe $B = (AA^t)^{-1}$ tal que $AA^tB = I$, en particular notamos que $A(A^tB) = I$, es decir, A tiene un inverso por la derecha, lo que basta con determinantes para afirmar que A es invertible.

Solución. b) Calculamos directamente la potencia

$$\begin{aligned} B^3 &= (I - A)^3 = (I - A)(I - A)^2 \\ &= I^3 - 2I^2A + IA^2 - I^2A + 2AI^2 - A^3 \\ &= I - 2A + A - A + 2A - A \\ &= I - A = B \ . \end{aligned}$$

Ahora, si A es invertible, entonces existe A^{-1}, por lo que $A^2 = A \to A = I$ al multiplicar a ambos lados de la igualdad por A^{-1}, por loq ue si A invertible entonces $A = I$, por lo que en consecuencia $B = I - A = 0$ (la matriz cero.)