Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Tarea 3 Resuelta

1. Determine la suma de las raíces del polinómio $z^5 - z^3 + z^2 - 1$.

Solución. Primero vemos que

$$\begin{aligned} p(z) &= z^5 - z^3 + z^2 - 1 \\ &= (z^5 - z^3) + (z^2 - 1) \\ &= z^3(z^2 - 1) + (z^2 - 1) \\ &= (z^3 + 1)(z^2 - 1)\ , \end{aligned}$$

por lo que si z es tal que $f(z) = 0$, entonces $z^3 + 1 = 0$ o $z^2 - 1 = 0$. Para esta última ecuación obtenemos las soluciones $z = \pm 1$. Vemos ahora que $z^3 + 1 = 0 \ \Rightarrow z^3 = -1$, por lo tanto estamos buscando las raíces cúbicas de $-1 = e^{i\pi}$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{\frac{i\pi}{3}} \\ z_1 &= e^{\frac{i(\pi+2\pi)}{3}} \\ &= e^{i\pi} = -1 \\ z_2 &= e^{\frac{i(\pi+4\pi)}{3}} \\ &= e^{\frac{i5\pi}{3}}\ . \end{aligned}$$

Sumando todas las soluciones encontradas se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - 1 + z_0 + z_1 + z_2 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - 1 + \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0\ . \end{aligned}$$

2. (a) Determine las raíces quintas de la unidad y grafíquelas en el plano polar.

Solución. Podemos decir que $1 = e^{i \cdot 0}$ (forma polar con ángulo 0), por lo que las raíces quintas de la unidad están dadas por el conjunto

$$\left\{ e^{\frac{2k\pi}{5}} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4. \right\}$$

desde donde obtenemos $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}}$.

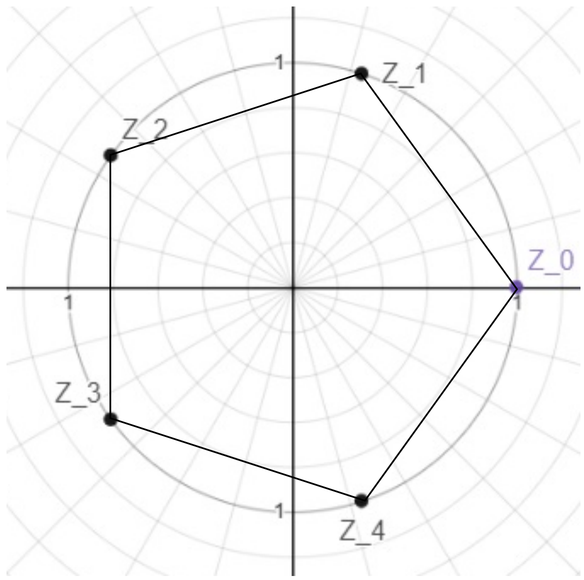

Figure 1: Raíces quitas de la unidad.

(b) Demuestre que aparece un pentágono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen de radio 1.

Solución. Como $|z_k| = 1 \ \forall \ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, las raíces quintas de la unidad se encuentran todas sobre el círculo unitario, en consecuencia, el pentágono que se forma al unir con un segmento de recta dos raíces consecutivas estará inscrito en esta misma circunferencia. Notamos ahora que los largos de dicho pentagono tienen las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_0| &= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| . \\
|z_2 - z_1| &= \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} - e^{\frac{2\pi}{5}} \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right) \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} \right| \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|z_3 - z_2| &= \left| e^{i\frac{6\pi}{5}} - e^{\frac{4\pi}{5}} \right| \\
&= \left| e^{i\frac{4\pi}{5}} \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right) \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| \ . \\
|z_4 - z_3| &= \left| e^{i\frac{8\pi}{5}} - e^{\frac{6\pi}{5}} \right| \\
&= \left| e^{i\frac{6\pi}{5}} \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right) \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| \ . \\
|z_0 - z_4| &= \left| 1 - e^{\frac{8\pi}{5}} \right| \\
&= \left| e^{\frac{10\pi}{5}} - e^{\frac{8\pi}{5}} \right| \\
&= \left| e^{i\frac{8\pi}{5}} \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right) \right| \\
&= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| \ ,
\end{aligned}
$$

lo que muestra que todos los lados del pentágono son del mismo largo, pero además cada par de raíces consecutivas forman un ángulo de $\frac{2\pi}{5}$, por lo que los ángulos internos de la figura son congruentes. Concluímos que el pentágono debe ser regunlar.

3. Sea $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Determine las raíces quintas de w. ¿ Existe alguna relación con algún pentágono regular inscrito en alguna circunferencia?.

Solución. Las raíces quintas del complejo $w = |w|e^{i\theta}$ estan dadas por

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[5]{|w|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{5}} \\
&= \sqrt[5]{|w|}e^{i\frac{\theta}{5}}e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\
&= \sqrt[5]{|w|}e^{i\frac{\theta}{5}}z_k \quad , \ k \in \{0,1,2,3,4\}
\end{aligned}
$$

donde z_k son las raíces quintas de la unidad de la pregunta anterior.

Vemos que $e^{i\frac{\theta}{5}}e^{i\frac{2k\pi}{5}} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{5}}$ nos dice que al multiplicar z_k por $e^{\frac{\theta}{5}}$, simplemente estamos rotando z_k en un ángulo de $\frac{\theta}{5}$, por lo que en particular $\left\{ e^{\frac{\theta}{5}}z_k \mid k \in \{0,1,2,3,4\} \right\}$ son las raíces rotadas, por lo que el pentágono rotado sigue siendo regular.

Finalmente, multiplicar por $\sqrt[5]{|w|}$ simplemente contrae o expande los vectores, es decir, corresponde al radio que tienen nuestras raíces, con lo que ya podemos ver que lo que obtenemos finalmente es un pentagono regular inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[5]{|w|}$.