Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Resueltos complejos, sistemas de ecuaciones.

1. * Sea $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega \neq 1$. Muestre que

$$(\omega^n = 1) \;\Rightarrow\; (\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots + \omega + 1 = 0) \; \forall \; n \geq 2 \; .$$

Solución. Agrego este mini ejercicio para poder hacer cómodamente lo que sigue.

Por definición, si $\omega \in \mathbb{C}$ es tal que $w^n - 1 = 0$, a este complejo lo llamamos *raíz n-ésima de la unidad* (es decir, llamamos a un complejo raíz n-ésima de la unidad si es solución al polinomio $p(z) = z^n - 1$). Dicho esto, consideremos la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r} \; .$$

Resulta que exactamente la misma demostración presentada para $r \in \mathbb{R}$ muestra la igualdad para $r \in \mathbb{C}$. Entonces, como $\omega \neq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots + \omega + 1 &= \sum_{k=0}^{n-1} w^k \\ &= \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0 \; , \quad \text{pues} \quad \omega^n = 1 \; . \end{aligned}$$

(Si $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 1$, ¿ Es cierto que $p(z) = z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$?
¿ Se puede generalizar más este resultado ?)

2. Si ω es una raíz cúbica compleja de la unidad, muestre que:

   (a) $(1 + \omega^2)^4 = \omega$.

   Solución. Tenemos que $\omega^3 = 1$ (raíz cúbica) y además $\omega \neq 1$ (raíz compleja), por lo que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ de donde tenemos que $\omega^2 + 1 = -\omega$. Dicho esto se tiene que

$$\begin{aligned} (1 + \omega^2)^4 &= (-\omega)^4 = \omega^4 \\ &= \omega^3 \cdot \omega = \omega \; . \end{aligned}$$

(b) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4.$

Solución. Vemos que $\omega+1=-\omega^2$, y junto con lo dicho antes tenemos que

$$\begin{aligned}(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) &= (-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)\\ &= 4\omega\cdot\omega^2 = 4\omega^3 = 4\ .\end{aligned}$$

(c) $(2+2\omega+5\omega^2)^6=729.$

Solución. Vemos que se cumple que $2\omega^2+2\omega+2=0$, por lo que

$$\begin{aligned}(2+2\omega+5\omega^2)^6 &= (2+2\omega+2\omega^2+3\omega^2)^6\\ &= 3^6(\omega^3)^4 = 3^6\cdot 1^4 = 729\ .\end{aligned}$$

3. Calcular $\left(3\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)\left(2\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^2$ y $\frac{\left(3\text{cis}\frac{5\pi}{6}\right)}{\left(6\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)}$.

Solución. Sean

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = |z|\text{cis}(\alpha) = |z|e^{i\alpha}\\ w &= |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = |w|\text{cis}(\beta) = |w|e^{i\beta}\ .\end{aligned}$$

Asumiremos las siguientes igualdades (cuando tienen sentido):

$$\begin{aligned}zw &= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)) = |z||w|\text{cis}(\alpha+\beta) = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}\ ,\\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}(\cos\alpha-\beta + i\operatorname{sen}\alpha-\beta) = \frac{|z|}{|w|}\text{cis}(\alpha-\beta) = |z||w|e^{i(\alpha-\beta)}\ ,\\ z^n &= |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|^n\text{cis}(n\alpha) = |z|^n e^{i\ n\alpha}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ .\end{aligned}$$

Dicho esto vemos que

$$\begin{aligned}\left(3\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)\left(2\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^2 &= 3e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2e^{\frac{\pi}{2}}\right)^2\\ &= 3e^{i\frac{\pi}{6}}\ 4e^{i\pi}\\ &= 12e^{i\frac{7\pi}{6}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\left(3\text{cis}\frac{5\pi}{6}\right)}{\left(6\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)} &= \frac{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}{6e^{i\frac{\pi}{6}}}\\ &= \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

4. Sea $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\ i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}\ i}{2}\right)^n$. Muestre que $z = 2$ si n es múltiplo de 3 y $z = -1$ en otro caso.

Solución. Para ver las potencias es más sencillo trabajar con la forma polar de los elementos que aparecen en la igualdad para usar el teorema de Moviere; Si $\omega_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\ i}{2} = |\omega_1|e^{i\alpha}$ y $\omega_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\ i}{2} = |\omega_2|e^{i\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}
|\omega_1| &= \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
|\omega_2| &= \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\
\tan(\alpha) &= -\sqrt{3} \\
\tan(\beta) &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Como ω_1 pertenece al segundo cuadrante y ω_2 al tercer cuadrante, obtenemos que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ y $\beta = \frac{4\pi}{3}$, o también podemos encontrarlos teniendo en cuenta que $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Esto nos dice finalmente que

$$\begin{aligned}
\omega_1^n + \omega_2^n &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n \\
&= e^{i\frac{2n\pi}{3}} + e^{i\frac{4n\pi}{3}}\ .
\end{aligned}$$

Ahora, si n es múltiplo de 3, entonces $n = 3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, lo que deja nuestra suma como sigue:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{3k} + \omega_2^{3k} &= e^{i\frac{2(3k)\pi}{3}} + e^{i\frac{4(3k)\pi}{3}} \\
&= e^{i2k\pi} + e^{i4k\pi} \\
&= 1 + 1 = 2\ .
\end{aligned}$$

Si n no es múltiplo de 3, entonces tenemos dos casos, $n = 3k+1$ o $n = 3k+2$. Vemos el primer caso:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{3k+1} + \omega_2^{3k+1} &= e^{i\frac{2(3k+1)\pi}{3}} + e^{i\frac{4(3k+1)\pi}{3}} \\
&= e^{i2k\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i4k\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad (= \omega_1^3\omega_1 + \omega_2^3\omega_2) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
&= \omega_1 + \omega_2 \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1
\end{aligned}$$

Y el segundo caso tenemos que

$$\begin{aligned}\omega_1^{3k+2}+\omega_2^{3k+2} &= \omega_1^{3k}\omega_1^2+\omega_2^{3k}\omega_2^2\\ &= \omega_1^2+\omega_2^2\\ &= e^{i\frac{4\pi}{3}}+e^{i\frac{8\pi}{3}}\\ &= \omega_2+e^{i\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}=\omega_2+e^{i\frac{2\pi}{3}}\\ &= \omega_2+\omega_1=-1\ .\end{aligned}$$

(Fijarse que ω_1 y ω_2 son las raíces cúbicas complejas de la unidad, por eso pasan las cosas raras que pasan).

5. Determine si el siguiente sistema de ecuaciones posee solución única, infinitas soluciones o ninguna.

$$\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 3x+2y+z&=1\\ 5x+3y+4z&=2\\ -2x-y+5z&=6\end{aligned}$$

Solución. Trabajaremos con la matriz ampliada del sistema de forma de dejarla en su forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 4 & 2\\ -2 & -1 & 5 & 6\end{array}\right) \xrightarrow[f_4+2f_1]{\substack{f_2-3f_1\\ f_3-5f_1}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 9 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 8\end{array}\right) \xrightarrow[f_3+2f_4]{\substack{f_1-f_4\\ f_2+f_4}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -4 & -7\\ 0 & 0 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 15 & 13\\ 0 & 1 & 3 & 8\end{array}\right)$$

Vemos que este sistema es inconsistente (sin soluciones), pues $z=\frac{6}{7}$ y $z=\frac{13}{15}$.

6. Sea λ constante en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+\lambda y&=1\\ \lambda x+2y&=1\end{aligned}$$

Encuentre valores de λ para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones, solución única y para cuáles no tiene solución.

Solución. Trabajaremos con la matriz ampliada para resolver el sistema en los casos que se pueda escalonando lo más posible;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2-\frac{\lambda}{2}f_1]{\lambda\neq 0} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 2-\frac{\lambda^2}{2} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4-\lambda^2 & 2-\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4-\lambda^2}f_2]{\lambda\neq\pm 2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\lambda}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) \xrightarrow{f_1-\frac{\lambda}{2}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2(2+\lambda)} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right),$$

desde donde vemos que si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \pm 2$ entonces tenemos una solución única $P = \left(\frac{1}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}\right)$. Vemos entonces que pasa en los casos excluídos:

Si $\lambda = 0$ entonces hay también solución única $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Si $\lambda = 2$ entonces ambas ecuaciones son iguales, por lo que hay infinitas soluciones dadas por el conjunto $S = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{2} - x\}$ (representan una recta en $\mathbb{R}^2$).

Finalmente, si $\lambda = -2$ entonces el sistema no tiene solución pues

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

nos dice que $0 = 2$.

7. Sea a constante en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + a\ x_3 &= 1 \\ a\ x_1 + a\ x_2 + x_3 &= a \\ x_1 - ax_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

(a) ¿Para qué valores de a el sistema es inconsistente?.

(b) Determine valores de a para que el sistema sea consistente y encuentre la(s) solución(es).

Solución. En primer lugar, si $a = 0$ tenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que nos da una solución única $P = (0, 1, 0)$.

Supongamos $a \neq 0$. Vemos ahora la matriz ampliada del sistema y tratamos de escalonarla ;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & a \\ 1 & -a & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2-f_1 \\ f_4-f_1}]{\substack{a\neq 0 \\ f_3-af_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & -a-1 & a-1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4+f_3]{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

donde vemos de inmediato que si $a = -1$ entonces el sistema es inconsistente pues la última fila diría que $0 = -1$. Dicho esto, si $a = 1$ la matriz queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ lo que nos deja infinitas soluciones pues $y = \frac{1}{2}$ y $z = \frac{1}{2} - x$, por lo que el conjunto solución en este caso sería

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x, y, z) \mid y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2} - x\right\} \\ &= \left\{\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + x(1, 0, -1) \mid x \in \mathbb{R}\right\} . \end{aligned}$$

Concluímos con el último caso, cuando $a \neq -1$, $a \neq 1$; desde la matriz escalonada despejamos los sistemas de ecuaciones lo que da las soluciones $z = 0$, $y = \frac{1}{a+1}$ y $x = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$, es decir la solución es el punto $P = \left(\frac{a}{a+1}, \frac{1}{a+1}, 0\right)$.

8. Sea la matriz

$$A = \begin{matrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{matrix}$$

(a) Determine el conjunto solución de su sistema homogéneo.

(b) Describir las soluciones de $Ax = b$, con $b = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$

Solución. Para ver las soluciones del sistema homogéneo simplemente escalonamos la matriz dada;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2+f_1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que $3x = 4z$ y $0 = y$, es decir, tenemos el conjunto solución dado por

$$S = \left\{ \left(x, 0, \frac{3}{4}x \right) \ \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \left(1, 0, \frac{3}{4} \right) \ \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Para la segunda parte trabajamos con la matriz ampliada y escalonamos;

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3 - 2f_1]{f_2 + f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

lo que nos da $3x = 4z - 3$ y $y = 2$, lo que nos deja el conjunto solución

$$S = \left\{ \left(x, 2, \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \right) \ \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(0, 2, \frac{3}{4} \right) + x \left(1, 0, \frac{3}{4} \right) \ \mid x \in \mathbb{R} \right\} .$$

(Notar cómo la segunda solución consiste en una solución particular más la solución al sistema homogéneo.)