

Ejercicios ayudantía 7

1. Demuestre que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

Solución. Si consideramos $|z|^2 = z\bar{z}$, entonces

$$\begin{aligned}|z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) + (z - w)(\overline{z - w}) \\&= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\&= 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2 + |w|^2)\end{aligned}$$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ y sean $z, w \in \mathbb{C}$. Muestre que

$$\left| \frac{z + w}{\bar{z}w + 1} \right| = 1 .$$

Solución. Como $|z| = 1$, entonces $1 = |\bar{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|} = |z|^2 = z\bar{z}$. Dicho esto vemos que

$$\begin{aligned}\left| \frac{z + w}{\bar{z}w + 1} \right| &= \left| \frac{z + w}{\bar{z}w + z\bar{z}} \right| \\&= \left| \frac{z + w}{\bar{z}(w + z)} \right| \\&= \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| = 1 .\end{aligned}$$

3. Hallar la fórmula trigonométrica de :

(a) $\sqrt{3} + i$.

Solución. La fórmula trigonométrica de este complejo simplemente corresponde a escribir el par ordenado en sus coordenadas polares; Sea $z = \sqrt{3} + i$. Como punto en el plano simplemente correspondería al punto $z = (\sqrt{3}, 1)$. A este punto lo veremos en sus coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \frac{y}{x} = \theta$, etc. Inmediatamente tenemos que $|z| = r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Además $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, y como z está en el primer cuadrante, entonces $\theta = \frac{\pi}{6}$. Con esto tenemos que $z = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (|z| \cos \frac{\pi}{6}, |z| \sin \frac{\pi}{6})$, es decir tenemos su forma trigonométrica

$$\begin{aligned} z &= 2 \cos \frac{\pi}{6} + i 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ z &= 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \\ z &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

(b) $-\sqrt{3} + i$.

Solución. Sea $z = -\sqrt{3} + i$. Tenemos que $r = \sqrt{3+1} = 2$ y $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$ (ersto pues el complejo está en el segundo cuadrante). con esto

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ z &= 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \\ z &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

(c) 8.

Solución. Si $z = 8$ entonces $r = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$. Además $y = 0 = r \sin \theta$, por lo tanto $\sin \theta = 0$, y como estamos en el primer cuadrante $\theta = 0$. Dicho esto $z = 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0) = 8 \operatorname{cis} 0 = 8e^{i0}$.

(d) $-2i$.

Solución. $z = -2i$, por lo que $r = \sqrt{(-2)^2} = 2$. Como $x = 0 = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$ pues el complejo se encuentra en el tercer cuadrante. Con esto tenemos que $z = -2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

4. Calcule:

(a) $\sqrt[3]{-8i}$.

Solución. Sea $z = -8i$, entonces $r = 8$, y además $x = r \cos \theta = 0$, por lo tanto $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (igual que antes.) Ya sabiendo la forma polar del complejo tenemos que sus raíces terceras están dadas por

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}$$

donde $k = 0, 1, 2$. Con esto obtenemos las soluciones $z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = 2$ y $z_2 = \frac{11\pi}{6}$.

Nota: Notar que al calcular esto estamos respondiendo la pregunta ¿Cuántas soluciones en $\mathbb{C}$ podemos encontrar para el polinomio $p(z) = z^3 - 8$? ¿cuáles son estas soluciones?. En los números reales, dicho polinomio tiene sólo una solución (a lo más tiene 3), pero en el cuerpo de los números complejos, un polinomio de grado n tiene n soluciones (se pueden repetir soluciones).

(b) $\sqrt[5]{1}$.

Solución. $z = 1 \Rightarrow r = 1$ y además $\theta = 0$, luego $\sqrt[5]{1} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, de donde obtenemos las soluciones $z_0 = \operatorname{cis} 0 = 1$, $z_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{5}$, $z_2 = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}$, $z_3 = \operatorname{cis} \frac{6\pi}{5}$ y $z_4 = \operatorname{cis} \frac{8\pi}{5}$.