Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Resueltos Trigonometría, Polares.

1. Sea la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Usando su foco $F=(c,0)$ como centro, se describe una circunferencia con radio $r=b$. Demostrar que la circunferencia es tangente a las asíntotas en los puntos en que ésta corta a la directriz de la hipérbola.

   Solución. Vemos que la circunferencia descrita tiene ecuación $(x-c)^2+y^2=b^2$, las asíntotas de la hipérbola corresponden a las ecuaciones $A: \; y=\pm\frac{b}{a}x$, y las directrices $D: \; x=\pm\frac{a^2}{c}$. Dicho esto vemos lo siguiente;

$$d(F,A)=\frac{|ma-b+n|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\frac{b}{a}c}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{\frac{b}{a}c}{\frac{c}{a}}=b \;,$$

   con lo que podemos afirmar que la asíntota A es tangente a la circunferencia de radio b y de centro $F=(c,0)$.

   Vemos ahora donde se intersectan las asíntotas con la directriz, dadas respectivamente por $A: \; y=\pm\frac{b}{a}x$ y $D: \; x=\frac{a^2}{c}$. Su intersección sale de evaluar la ecuación de D en la de A, de donde obtenemos que $y=\pm\frac{ab}{c}$, es decir intersectan en los puntos $\left(\frac{a^2}{c},\pm\frac{ab}{c}\right)$, los cuales efectivamente pertenecen a la circunferencia, pues

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)^2+\left(\pm\frac{ab}{c}\right)^2&=\left(\frac{a^2-c^2}{c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\\&=\frac{b^4}{c^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\\&=b^2\left(\frac{b^2+a^2}{c^2}\right)=b^2\;.\end{aligned}$$

   (Se usa múltiples veces que $c^2=a^2+b^2$ y sus despejes $b^2=c^2-a^2$ por ejemplo.)

   Esto termina de demostrar la afirmación del enunciado.

   Hay más formas de demostrar esta misma afirmación, por ejemplo intersectar directamente la circunferencia con la asíntota, lo que deja el sistema $(x-c)^2+y^2=b^2$ y $A: \; y=\pm\frac{b}{a}x$, del cual vamos a obtener las soluciones $x=\frac{a^2}{c}$ e $y=\pm\frac{ab}{c}$, pero parece ser un camino algo más engorroso.

2. Muestre las siguientes identidades:

   (a) $\cos^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{2}$.

   Solución. Consideramos las siguientes identidades como conocidas:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1\ .\end{aligned}$$

   Vemos entonces ahora que

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \cos(x+x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ \cos(2x) &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\\ \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1\\ \cos^2 x &= \frac{\cos(2x) + 1}{2}\ .\end{aligned}$$

   (b) $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$.

   Solución. Para deducir esta identidad basta ver que sumando las dos fórmulas del coseno de suma de ángulos obtenemos que

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y\ ,$$

   lo cual se parece en forma a lo que se nos pide, pero no es exactamente el resultado que buscamos. A esta ecuación aplicaremos el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$, lo que implica que $u + v = 2x$ y $u - v = 2y$, es decir $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. Reemplazando obtenemos que

$$\cos(u) + \cos(v) = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\ .$$

   (c) $\cos x = f(\tan\frac{x}{2})$ (Encuentre f).

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \frac{x}{2}\\ \Leftrightarrow\ 2\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= x\\ \Leftrightarrow\ \cos\left(2\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) &= \cos x\end{aligned}$$

   Por lo tanto la función f que buscamos es $f(x) = \cos(2\arctan(x))$.

3. Resolver $\arccos x + \arcsin x = 0$.

Solución. Tenemos que $\arccos x + \arcsin x = 0 \iff \arccos x = -\arcsin x$. Dicho esto, si ponemos $\alpha = \arccos x$ y $\beta = -\arcsin x = \arcsin(-x)$, obtenemos que $\alpha = \beta$, $\cos\alpha = x$ y $\sin\beta = -x$.

Como $\alpha = \beta$ entonces

$$x = \cos\alpha = \cos\beta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \pm\sqrt{1-x^2}\ ,$$

lo que implica que

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

Pero al evaluar estos dos valores en la ecuación original ninguno de ellos lo cumple, por lo que concluímos que no hay soluciones a la ecuación del enunciado.

4. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por la ecuación cartesiana:

   (a) $x^2 - 4y - 4 = 0$.

   Solución. Dados x e y, para obtener la forma polar de esta ecuación usamos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ lo que al reemplazar se obtiene

$$x^2 - 4y - 4 = 0 \iff r^2\cos^2\theta - 4r\sin\theta - 4 = 0\ .$$

   Buscamos dejar la ecuación como r en función de θ, para lo cual consideramos la ecuación de segundo grado de incógnita r, cuyas soluciones están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-4\sin\theta \pm \sqrt{16\sin^2\theta + 4\cdot 4\cos^2\theta}}{2\cos^2\theta} \\ &= \frac{-4\ \sin\theta \pm \sqrt{16}}{2\cos^2\theta} \\ &= 2\ \frac{\pm 1 - \sin\theta}{1-\sin^2\theta} \\ &= 2\ \frac{\pm 1 - \sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}\ . \end{aligned}$$

   Esto nos da dos posibles representaciones polares para la ecuación,

$$r_1 = \frac{2}{1+\sin\theta}$$

$$r_2 = \frac{2}{\sin\theta - 1}\ .$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$. (Se puede comprobar que ambas describen el mismo lugar geométrico al graficar, o darse cuenta que el dibujo es simétrico con respecto al cambio $x \to -x$ lo que se traduce en polares a $r \to -r$, $\theta \to -\theta$ y también que $r_1(\theta) = -r_2(-\theta)$).

(b) $xy = 2$

Solución. Como antes procedemos reemplazando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, lo que nos deja la ecuación

$$r^2 \sin\theta\cos\theta = 2$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}}$$

a partir de la cual obtenemos dos ecuaciónes en forma polar que describen el mismo lugar geométrico

$$r_1 = \sqrt{\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$r_2 = -\sqrt{\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}} ,$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$. (Acá la simetría es con respecto al origen, es decir $(x, y) \to (-x, -y)$, que se traduce al cambio en polares $r \to -r$. Notar que $r_1 = -r_2$).

5. Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico cuya ecuación polar es:

(a) $r = \frac{2}{1-cos\theta}$.

Solución. Sabemos que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} r = \frac{2}{1-cos\theta} &\Leftrightarrow r(1-cos\theta) = 2 \\ &\Leftrightarrow r = 2 + x \\ &\Leftrightarrow r^2 = 4 + 4x + x^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4x - 4 = 0 \end{aligned}$$

(b) $r^2 = 4\cos(2\theta)$.

Solución. tenemos que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, de donde podemos deducir además que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Tendremos además en consideración la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ resuelta anteriormente. Dicho esto vemos que

$$\begin{aligned} r^2 = 4\cos(2\theta) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(2\cos^2\theta - 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\ &\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2) \ . \end{aligned}$$

(Este lugar geométrico recibe el nombre de *Lemniscata de Bernoulli*, el cual es análogo a una elipse; Sean dos puntos dados F_1 y F_2 (focos) a distancia $2d$ entre sí. definimos la Lemniscata como el lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de su distancia a los dos focos es constante y vale d^2, es decir $d(P, F_1) \cdot d(P, F_2) = d^2$.)