Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Tarea 2 Resuelta

1. Dada la ecuación
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
Demuestre lo siguiente:

   (a) Si $A = C = 0$ y $D \neq 0$ ó $E \neq 0$, entonces la ecuación representa a una recta.

   Solución. Asumimos $A = C = 0$, por lo que la ecuación dada queda de la forma $Dx + Ey + F = 0$, donde $D \neq 0$ ó $E \neq 0$. El lugar geométrico de una recta corresponde a los puntos que satisfacen una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$. El único caso en que esta última ecuación no corresponde con una recta como lugar geométrico es cuando $A = B = 0$, pues la ecuación $C = 0$ la satisfacen todos los puntos del plano (o si lo vemos en la definición, es equivalente a que los dos puntos fijos que definen el lugar geométrico sean el mismo), por lo que para que sea recta debemos pedir que $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ (negación lógica de la afirmación $A = 0$ y $B = 0$), lo cual corresponde exactamente con las condiciones que cumple nuestra ecuación.

   (b) Si ($A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$) ó ($C = 0$, $A \neq 0$ y $E \neq 0$) , entonces la ecuación representa una parábola.

   Solución. Caso 1: Supongamos que $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F \\
0 &= Cy^2 + Dx + Ey + F \\
x &= -\frac{C}{D}y^2 - \frac{E}{D}y - \frac{F}{D}\ .
\end{aligned}$$

   Como $C \neq 0$ esta ecuación efectivamente corresponde a una parábola de directriz paralela al eje X (si $C = 0$ tenemos una recta.)

Caso 2: Supongamos que $C = 0$, $A \neq 0$ y $E \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F \\
0 &= Ax^2 + Dx + Ey + F \\
y &= -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E} \ .
\end{aligned}$$

Como $A \neq 0$ esta ecuación efectivamente corresponde a una parábola de directriz paralela al eje Y (si $A = 0$ tenemos una recta.)

(c) Si $A \neq 0$, $A = C$ y $4AF < D^2 + E^2$ entonces la ecuación representa una circunferencia.

Solución. Dadas las condiciones del enunciado se tiene que

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\
Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\
x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} &= 0 \\
\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2} + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} &= 0 \\
\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{E}{2A}\right)\right)^2 &= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \\
\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{E}{2A}\right)\right)^2 &= \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.
\end{aligned}$$

Una circunferencia es de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, por lo que a nuestra última linea de ecuaciones solo le faltaría asegurar que lo que hay al lado derecho es un número positivo para así poder afirmar que corresponde a una circunferencia de radio $r = \sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}}$, es decir, esto es circunferencia en la medida de que $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2} > 0 \Leftrightarrow 4AF < D^2 + E^2$, lo cual se cumple por hipótesis (por enunciado).

(d) Si $AC > 0$ con $A \neq C$ y $F < \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$ entonces la ecuación representa una elipse.

Solución. Tenemos que $AC > 0 \Rightarrow A \neq 0$ y $C \neq 0$, además $A > 0 \Leftrightarrow C > 0$. Dicho esto vemos que

$$
\begin{aligned}
Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F&=0\\
\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{A}+\frac{D}{AC}x+\frac{E}{AC}y+\frac{F}{AC}&=0\\
\left(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{D}{2A\sqrt{C}}\right)^2-\frac{D^2}{4CA^2}+\left(\frac{y}{\sqrt{A}}+\frac{E}{2C\sqrt{A}}\right)^2-\frac{E^2}{4AC^2}+\frac{F}{AC}&=0\\
\frac{\left(x-\left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{C})^2}+\frac{\left(y-\left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{A})^2}&=\frac{CD^2+AE^2-4FAC}{4A^2C^2}\ .
\end{aligned}
$$

Ahora, como $F<\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$ tenemos que $\alpha^2=\frac{CD^2+AE^2-4FAC}{4A^2C^2}>0$, por lo que nuestra última ecuación queda de la forma

$$\frac{\left(x-\left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\alpha\sqrt{C})^2}+\frac{\left(y-\left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\alpha\sqrt{A})^2}=1\ ,$$

lo cual corresponde a una ecuación de una elipse de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ .$$

(Si sucediera que $A=C$ entonces en particular la ecuación describiría una circunferencia de radio $r=ab$.)

Caso 2: $A<0$ y $B<0$. Creo que el enunciado no permite demostrar este asunto pues deberíamos tener una condición diferente en la segunda desigualdad, $F>\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$. El desarrollo en este caso es el mismo.

(e) Si $AC<0$ con $A\neq C$ y $F\neq\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$ entonces la ecuación representa una hipérbola.

Solución. Tenemos que $AC<0\Rightarrow A\neq 0$ y $C\neq 0$ (además $A>0\Leftrightarrow C<0$.) Dicho esto vemos que

$$
\begin{aligned}
Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F&=0\\
\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{A}+\frac{D}{AC}x+\frac{E}{AC}y+\frac{F}{AC}&=0\\
-\frac{x^2}{-C}+\frac{y^2}{A}-\frac{D}{A(-C)}x+\frac{E}{AC}y+\frac{F}{AC}&=0\\
-\left(\frac{x}{\sqrt{-C}}+\frac{D}{2A\sqrt{-C}}\right)^2-\frac{D^2}{4CA^2}+\left(\frac{y}{\sqrt{A}}+\frac{E}{2C\sqrt{A}}\right)^2-\frac{E^2}{4AC^2}+\frac{F}{AC}&=0\\
\frac{\left(y-\left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{A})^2}-\frac{\left(x-\left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{-C})^2}&=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}\ .
\end{aligned}
$$

Ahora, como $F \neq \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \Rightarrow 0 \neq \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$, en particular

$$0 \neq \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC} \Rightarrow 0 \neq \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} = \alpha \ .$$

Si $\alpha > 0$ la ecuación que nos queda es

$$\frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{\alpha}\sqrt{A})^2} - \frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{\alpha}\sqrt{-C})^2} = 1 \ ,$$

y si $\alpha < 0$ la ecuación que queda es

$$\frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{-\alpha}\sqrt{-C})^2} - \frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{-\alpha}\sqrt{A})^2} = 1 \ ,$$

(Falta el caso $A < 0 \Leftrightarrow C > 0$, lo que es básicamente repetir este desarrollo para obtener la ecuación

$$\pm\frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{\mp\alpha}\sqrt{C})^2} \pm \frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{\mp\alpha}\sqrt{-A})^2} = 1 \ ).$$

(f) ¿Qué sucede en los puntos (d) y (e) si $F = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$? (Describa el lugar geométrico que corresponde a esta condición.)

Solución. Si $F = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \Rightarrow \frac{CD^2+AE^2-4FAC}{4A^2C^2} = 0$, tenemos en el desarrollo de la elipse que

$$\begin{aligned}
\frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{C})^2} + \frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{A})^2} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4FAC}{4A^2C^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow x - \left(-\frac{D}{2A}\right) = 0 \ \text{ y } \ y - \left(-\frac{E}{2C}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = -\frac{D}{2A} \ \text{ y } \ y = -\frac{E}{2C} \ ,&
\end{aligned}$$

lo que nos dice que el lugar geométrico que cumple con esta ecuación es sólo el punto (x, y) con las igualdades mencionadas.

En el caso de la hipérbola tenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{A})^2} - \frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{-C})^2} &= \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2}{(\sqrt{A})^2} &= \frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{-C})^2} \\
\Leftrightarrow \left(y - \left(-\frac{E}{2C}\right)\right)^2 &= (\sqrt{A})^2 \frac{\left(x - \left(-\frac{D}{2A}\right)\right)^2}{(\sqrt{-C})^2} \\
\Leftrightarrow y - \left(-\frac{E}{2C}\right) &= \pm \frac{\sqrt{A}x}{\sqrt{-C}} \pm \frac{D}{2A\sqrt{-C}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-C}}x \pm \frac{D}{2A\sqrt{-C}} + \frac{E}{2C}$$

Lo cual corresponden a dos rectas (una con los signos $+$ y otra con los signos $-$).

2. Encuentre los focos, excentricidad, vértices y directrices de las siguientes cónicas.

$$3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0 \qquad x^2 - 2y^2 + 2x + 8y - 3 = 0.$$

Esboce su gráfica, incluyendo los elementos importantes.

Solución. Consideremos la ecuación $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$, para conocer a qué lugar geométrico corresponde primero completamos cuadrados y factorizamos para tener una forma de cónica como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 &= 0 \\ \left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3} + (y-1)^2 - 1 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + (y-1)^2 &= \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} &= 1 \ , \end{aligned}$$

de donde obtenemos que es una elipse tal que $C = (h,k) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$, $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$, y como $a < b$, es vertical (eje mayor paralelo al eje Y), por lo tanto

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{4^2}{3} - \frac{4^2}{3^2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \ \text{ y } \ e = \frac{c}{b} = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{3} \ .$$

Con esto obtenemos focos, vértices mayores, vértices menores y directrices respectivamente:

$$F = (0, \pm c) + (h,k) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3 \pm 4\sqrt{2}}{3}\right) v \ .$$

$$V = (0, \pm b) + (h,k) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3}\right) \ .$$

$$B = (\pm a, 0) + (h,k) = (-2,1) \text{ o } \left(\frac{2}{3}, 1\right) \ .$$

$$L: \ y = k \pm \frac{b}{e} = 1 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3} \ .$$

Consideremos la ecuación $x^2 - 2y^2 + 2x + 8y - 3 = 0$, completando cuadrados y factorizando obtenemos que

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - 1 - 2((y-2)^2 - 4) - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow \ (x-(-1))^2 - 2(y-2)^2 = -4 \\
\Leftrightarrow \ \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(x-(-1))^2}{2^2} = 1
\end{aligned}$$

De aquí podemos ver que la ecuación describe una hipérbola donde los focos están alineados de forma paralela al eje Y, donde $C = (h,k) = (-1,2)$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6}$, $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Con esto obtenemos focos, vértices y directrices y asíntotas respectivamente:

$$F = (0, \pm c) + (h,k) = \left(-1, 2 \pm \sqrt{6}\right) \ .$$

$$V = (0, \pm b) + (h,k) = \left(-1, 2 \pm \sqrt{2}\right) \ .$$

$$L: \ y = k \pm \frac{b}{e} = 2 \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

$$y = \pm\frac{b}{a}(x-h) + k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + 2 \ .$$