Ejercicios ayudantía 4

1. Para la siguiente elipse encuentre su intersección con los ejes X e Y , excentricidad y focos. $y^2 + 4x^2 - 3y = 12$.

Solución. Cuando $y = 0$ se tiene que $4x^2 = 12$, de donde obtenemos que $x = \pm\sqrt{3}$. (Esto quiere decir que la curva corta al eje X en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$). Hacemos lo mismo para ver cuando $x = 0$: $y^2 - 3y - 12 = 0$, de donde obtenemos las soluciones $y = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2}$ (Lo que quiere decir que la curva corta al eje Y en los puntos $(0, \frac{3-\sqrt{57}}{2})$ y $(0, \frac{3+\sqrt{57}}{2})$).

Dicho esto, para obtener los elementos de la elipse vamos a dejarla en su forma canónica completando cuadrado y factorizando;

$$\begin{aligned}y^2 + 4x^2 - 3y = 12 &\Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4x^2 = 12 \\&\Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 4x^2 = 12 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \\&\Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{57}{4}}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{57}{4^2}}\right)^2} = 1\end{aligned}$$

Ahora que está en la forma que conocemos lo primero que notamos que esta ecuación describe una elipse vertical (pues $\sqrt{\frac{57}{4}} > \sqrt{\frac{57}{4^2}}$), de centro de simetría $(h, k) = (0, \frac{3}{2})$, donde $a = \sqrt{\frac{57}{4^2}}$, $b = \sqrt{\frac{57}{4}}$, por lo que

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{\frac{57}{4} - \frac{57}{4^2}}}{\sqrt{\frac{57}{4}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}\sqrt{57}}{4}}{\frac{\sqrt{57}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para encontrar los focos debemos conocer el parámetro c de la elipse (distancia focal) y su centro de simetría (que ya obtuvimos anteriormente). Tenemos en este caso (elipse vertical) que $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, por lo tanto

$$c = \frac{\sqrt{3}\sqrt{57}}{4} = \frac{3\sqrt{19}}{4}.$$

Con esto podemos ver que los focos están dados por $F_1 = (0, \frac{3}{2}) - (0, \frac{3\sqrt{19}}{4}) = (0, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{19}}{4})$ y $F_2 = (0, \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{19}}{4})$.

Comentario.- Notar que según lo visto en clases nosotros asumimos que la ecuación de la elipse no cambia su forma sin importar si nos encontramos ante una elipse horizontal o vertical, pero lo que cambian son todas nuestras formulas de forma apropiada; por ejemplo, el centro de simetría no requiere ninguna modificación, pero para una elipse horizontal $\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$ manejamos que $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, que difiere en notación con lo que corresponde a una elipse vertical $\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right)$, que es tal que $e = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.

En algunos libros y páginas uno va a encontrarse con que a la hora de ponerle nombre a los elementos en la ecuación de la elipse, independiente de si esta corresponde a una vertical u horizontal, se asume en todo momento que $a > b$, por lo que vamos a tener dos ecuaciones distintas; $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ para elipses horizontales y $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ para elipses verticales. El beneficio de esto es que nuevamente hay nomenclatura que se mantiene; por ejemplo, si usamos esta distinción en la elipse, la expresión $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es válida para ambos tipos de elipse.

En conclusión, ambas notaciones son equivalentes, pero ojalá no confundir entre ellas.

- Encuentre la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y tiene excentricidad $e = \frac{2}{\sqrt{5}}$. (Resp. $4x^2 + 20y^2 = 139$).
- Calcular la excentricidad de una elipse en la que la distancia entre sus focos es la mitad de la distancia entre sus directrices.

Solución. En primer lugar vamos a asumir que la elipse que vamos a buscar es horizontal y tiene como centro de simetría el origen, es decir, de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ahora, si decimos que c es la distancia del origen a cualquiera de los focos, entonces la distancia entre los focos es $2c$, y si la distancia entre el origen y cualquiera de las directrices es x_0 , entonces la distancia entre ambas es $2x_0$, por lo que la información del enunciado se traduce en que

$$2c = 2x_0 .$$

Sabemos además que $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a}$, de donde podemos ver que

$$c = ae$$

(también pueden ver esta relación acá: $F = (\pm ae, 0) = (\pm c, 0)$). Consideramos ahora la directriz cuya ecuación corresponde a $x = \frac{a}{e} = x_0$, lo que nos deja la

expresión

$$\begin{aligned}2c &= \frac{a}{e} \\ \Rightarrow 2ae &= \frac{a}{e} \\ \Rightarrow e^2 &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow e &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(No consideramos la solución $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ pues la excentricidad, al ser un elemento geométrico (una razón entre dos distancias), es siempre positiva).

4. Sea la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Se definen los lados rectos de una elipse como *los segmentos perpendiculares al eje mayor que pasan por los focos de la elipse con extremos sobre la curva*. Para cada lado recto (que son dos), encuentre las coordenadas de dichos extremos y muestre que la longitud de cada lado recto (ancho focal) es $\frac{2b^2}{a}$.

Solución. Sea uno de los focos de esta elipse dado por $F = (c, 0)$. Buscamos los puntos de la elipse cuyas coordenadas en el eje X sea exactamente c . Si un punto (c, y) pertenece a la elipse, en particular debe cumplir con la ecuación de esta, lo que nos dice que

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow b^2c^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} b \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

Por lo tanto, los extremos del lado recto son $E_1 = (c, -\frac{b^2}{a})$ y $E_2 = (c, \frac{b^2}{a})$, y la distancia entre ellos (el largo de su lado recto) es $l = d(E_1, E_2) = \frac{2b^2}{a}$.

5. Dada la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$, determine su ecuación canónica, centro de simetría, vértices, focos, longitudes de ejes mayor y menor, longitud de su lado recto y excentricidad.

Solución. Obtenemos en primer lugar la ecuación completando cuadrados y

factorizando según corresponda:

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0 &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + 4(y^2 + 4y) + 21 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 - 16 + 12 = 0 \\&\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4 \\&\Leftrightarrow \frac{(x - 3)^2}{2^2} + \frac{(y + 2)^2}{1^2} = 1 .\end{aligned}$$

De esto podemos ver que esta ecuación describe una elipse horizontal, cuyo centro de simetría es $(h, k) = (3, -2)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$. Con esto sabemos que los vértices están dados por $V_1 = (h, k) - (a, 0) = (3 - 2, -2) = (1, -2)$, $V_2 = (h, k) + (a, 0) = (3 + 2, -2) = (5, -2)$, $B_1 = (h, k) - (0, b) = (3, -3)$, $B_2 = (h, k) + (0, b) = (3, -1)$. Los focos van a estar dados por $F_1 = (h, k) - (c, 0) = (3 - \sqrt{3}, -2)$, $F_2 = (h, k) + (c, 0) = (3 + \sqrt{3}, -2)$. Como ya conocemos las longitudes de los semiejes, la longitud total del eje respectivo es el doble de los valores a y b . Directamente vemos que $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y finalmente sabemos que la longitud de su lado recto está dado por $l = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 1^2}{2} = 1$.