Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Ejercicios ayudantía 3

1. Dada la recta $(a-2)x+(1-3a)y+a+1=0$. Determine a de modo que la recta:

   (a) Pase por el punto $(-2,1)$.

   (b) Tenga pendiente $\frac{2}{3}$.

   (c) Sea perpendicular a la recta $ax-2y+10=0$.

   Solución (a). El punto $(-2,1)$ debe satisfacer la ecuación de la recta para pertenecer a esta, por lo que $-2(a-2)+1(1-3a)+a+1=0$, de donde obtenemos que $a=\frac{3}{2}$.

   Solución (b). Tenemos que $m=\frac{a-2}{3a-1}=-\frac{2}{3}$, de donde tenemos que $a=\frac{8}{9}$.

   Solución (c). Ambas pendientes tienen que cumplir que $\left(\frac{a-2}{3a-1}\frac{a}{2}=-1\right)$, de donde se obtiene que $a=-2\mp\sqrt{6}$.

2. Se trazan perpendiculares desde el origen a las rectas L_1 y L_2, de ecuaciones $x+2y=10$ y $2x+y=10$ respectivamente. Determine la ecuación de la recta que une los pies de estar perpendiculares y la distancia entre ellos.

   Solución. Notamos primero que las rectas L_1 y L_2 tienen pendientes $m_1=-\frac{1}{2}$ y $m_2=-2$, respectivamente, por lo que una recta que pasa por el punto $(0,0)$ y es perpendicular a cada una de las rectas dadas nos dan pendientes $m_1'=2$ y $m_2'=\frac{1}{2}$, por lo que las rectas que pasan por el origen y son perpendiculares a L_1 y L_2 estan dadas por las ecuaciones $L_1':y=2x$, $L_2':y=\frac{x}{2}$. Encontramos con toda esta información los dos puntos base que nos piden, resolviendo los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} x+2y&=10\\ y&=2x \end{aligned}$$

   Lo que nos dá el punto $P_1=(2,4)$.

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 10 \\
y &= \frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

Lo que nos dá el punto $P_2 = (4, 2)$.

Ahora, usando ecuación punto-pendiente, tenemos la ecuación pedida: $y - 4 = -(x - 2)$. Además la distancia entre P_1 y P_2 es $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

3. Determine la ecuación de la circunsferencia:

   (a) Que pasa por los puntos $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (0, 2)$ y $P_3 = (-3, 0)$.

   (b) Con centro sobre la recta $x+y = 2$ y que pasa por los puntos $P_1 = (-3, 0)$ y $P_2 = (2, -1)$.

Solución (a). La circunferencia de centro (h, k) y de radio r tiene como ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. En esta ecuación tenemos 3 parámetros desconocidos, pero los 3 puntos que nos dan, al pertenecer al a circunferencia deben cumplir su ecuación, lo que nos deja el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
(2 - h)^2 + (-1 - k)^2 &= r^2 \\
h^2 + (2 - k)^2 &= r^2 \\
(-3 - h)^2 + k^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

La solución a este sistema está dado por $h = -\frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$ y $r^2 = \frac{13}{2}$.

Podemos resolver este problema de otraforma si consideramos los 3 puntos como un triángulo, pues forman un triángulo rectángulo. Para esto basta ver que que si calculamos las pendientes de las rectas entre los puntos correspondientes se tiene que $m_{P1,\ P2} \cdot m_{P_2,\ P_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{-2} = -1$ (esto quiere decir que las rectas son perpendiculares, por lo que el triangulo es rectángulo en P_2). Como la circunferencia está circunscrita en estre triángulo, el segmento $P1\ P3$ (la hipotenusa) es un diámetro de la circunferencia, luego el centro de esta está en el punto medio del segmento, dado por el promedio de las coordenadas de P_1 y P_3; $h = \frac{2-3}{2} = -1/2$, $k = \frac{-1}{2}$, además el radio lo podemos ver simplemente calculando la distancia del centro a P_1 (o a P_2, o podemos decir que es la mitad de la distancia entre P_1 y P_3), es decir $r^2 = \left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$.

Solución (b) Como antes, buscamos el centro (h, k) y el radio r de la circunferencia. Dicho esto, si la ecuación de la circunferesncia es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, vemos que se tiene que cumplir que:

$$
\begin{aligned}
(-3 - h)^2 + (-k)^2 &= r^2 \\
(2 - h)^2 + (-1 - k)^2 &= r^2 \\
h + k &= 2
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación pues el centro pertenece a la recta $x + y = 2$, por ende debe satisfacer su ecuación.

Resolviendo tenemos que $h = 0$, $k = 2$ y $r^2 = 13$. Concluímos que la ecuación de la circunferencia descrita es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 13 \ .$$

4. Dada la parábola de ecuación $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, determinar para cuáles k se tiene que la recta $y = 2x + k$ es tal que:

   (a) Corta a la parábola en dos puntos distintos.

   (b) Es tangente a la parábola*.

   (c) No corta a la parábola.

   Solución. Para responder a estas preguntas, basta ver el sistema de ecuaciones que se forma y estudiar sus soluciones. Si juntamos ambas condiciones (que equivale a buscar los puntos de intersección) tenemos que $y^2 - 2\left(\frac{y-k}{2}\right) + 6y + 9 = 0$, de donde obtenemos que $y^2 + 5y + k + 9 = 0$. Esta última ecuación puede tener 0, 1 o 2 soluciones, lo cual se interpreta como "la recta no corta a la parábola", "la recta es tangente a la parábola" o "la recta corta en 2 puntos a la parábola". Dicho esto, la cantidad y el intervalo de estas soluciones vienen dadas por el discriminante $\Delta = 25 - 4k - 36 = -11 - 4k$ de esa ecuación cuadrática, por lo que concluímos:

   - Hay dos soluciones si $\Delta > 0$, es decir, cuando $k > \frac{11}{4}$.
   - Una solución cuando $\Delta = 0$, es decir, cuando $k = \frac{11}{4}$.
   - No hay soluciones en el caso $\Delta < 0$, es decir, cuando $k < \frac{11}{4}$.