Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Ejercicios ayudantía 1

1. Usando las definiciones de igualdad e inclusión de conjuntos, muestre las siguientes propiedades:

   (a) $\emptyset \subset A$.

   (b) $A = A$.

   (c) $A = B \Rightarrow B = A$.

   (d) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

   (e) $A \subseteq A$.

   (f) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

   (g) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

2. Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

3. Sean A un conjunto y U el conjunto universo. Demuestre las siguientes propiedades

   (a) $A \cup A = A$.

   (b) $A \cap A = A$

   (c) $A \cup \emptyset = A$

   (d) $A \cup U = U$

   (e) $A \cap U = A$

   (f) $(A^c)^c = A$.

   (g) $A \cup A^c = U$

   (h) $A \cap A^c = \emptyset$

   (i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   (j) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

4. Demuestre usando inducción las siguientes afirmaciones:

   (a) $\forall n \geq 4$ se tiene que $2n < n!$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

   (d) $\forall n \geq 1$, $n^3 + 5n$ es divisible por 6.

   (e) $\forall n \geq 10$, $n^3 < 2^n$.

   (f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (g) $\forall n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (h) $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   (i) $\forall n \geq 1$, $x - y$ divide a $x^n - y^n$.

(j) $\forall n \geq 1$, $x+y$ divide a $x^{2n}-y^{2n}$.

(k) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$.

(l) Se definen los números $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ mediante $a_1=\sqrt{2}$ y $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$. Afirmación: $a_n<2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Encuentre el valor de las siguientes sumatorias:

(a) $\sum_{i=0}^{n} 2i-6i^2$.

(b) $\sum_{i=0}^{n}(i-1)^2-i^2$.

(c) $\sum_{i=1}^{n} \sin(i)-\sin(i+1)$.

(d) $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$.

(e) $\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2$.

(f) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}$.

6. Usando progresión aritmética (P.A.) o progresión geométrica (P.G.) resuelva:

(a) El segundo término de una P.A. es 20 y el quinto es 56. Calcular el n-ésimo término y la suma de los n primeros términos.

(b) En una P.A. el primer término es 4 y el k-ésimo término es 34. Si la suma de los primeros k términos es 247, determinar k.

(c) La suma de los 50 primeros términos de una P.A. es 200 y la suma de los 50 términos siguientes es 2700. Determine la P.A.

(d) Una persona debe cancelar una deuda de \$360000 en 40 cuotas que forman una P.A. Cuando 30 de los pagos están cubiertos, la persona fallece, dejando la tercera parte de la deuda sin pagar. Calcule el valor del primer pago.

(e) El cuarto término de una P.G. es 54 y el séptimo es $\frac{729}{4}$. Determine la P.G.