Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Pauta Tarea 1

1. Se define la siguiente sucesión; $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y la relación $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para todo $n \geq 1$.
   (a) Demuestre por inducción: $f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, $\forall n \geq 1$.
   (b) Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2n}$, $\forall n \geq 1$.

Solución (a). Probaremos dos casos base para esta proposición $n = 1$, $n = 2$ respectivamente:

$$f_{1+1} = f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1 .$$

$$f_{2+1} = f_3 = 2 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} .$$

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para $n-1$ y para n, es decir $f_{(n-1)+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$ y $f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, queremos demostrar que $f_{(n+1)+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
f_{(n+1)+1} &= f_{n+1} + f_n \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{28}{16} + \frac{16}{16}\right) \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{44}{16}\right) \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{49}{16}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} .
\end{aligned}$$

Con esto termina la demostración por inducción.

Solución (b). Caso base $n=1$; $\sum_{k=1}^{1} f_{2k-1} = f_{2\cdot 1-1} = f_1 = 1 = f_2$. Ahora, supongamos cierto que

$$\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2n}$$

Por demostrar:

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_{2k-1} = f_{2(n+1)}$$

. Para esto, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} f_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + f_{2(n+1)-1}\\ &= f_{2n} + f_{2n+1}\\ &= f_{2n+2} = f_{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

2. Calcule la suma $\sum_{k=0}^{n} k7^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$

   Solución. Trataremos de modificar el término de la sumatoria para poder usar teorema del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k7^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k7^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} 7^k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} 7^k \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 7^{k+1} \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\ &=7n \sum_{k=0}^{n-1} 7^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &=7n \sum_{k=0}^{n-1} 7^k \binom{n-1}{k-1}\\ &=7n(7+1)^{n-1} = 7n8^{n-1}.\end{aligned}$$

3. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) $\sum_{i=0}^{N} a_i = \sum_{i=2}^{N+3} a_{i-2}$

(b) Sea $n \geq 1$ y $q \neq 1$. $\sum_{i=k}^{n-1} q^i = q^k \frac{1-q^n}{1-q}$

(c) Sean $1 \leq k \leq n$. $\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right)$

Solución (a). Falso, de partida la primera suma tiene $n+1$ términos y la segunda tiene $n+2$. Sea la sucesión $a_n = 1 \forall n$ y consideremos $N = 2$, entonces $\sum_{i=0}^{2} a_i = 3 \neq 4 = \sum_{i=2}^{5} a_{i-2}$. En realidad casi cualquier ejemplo de sucesión sirve, básicamente hay que fijarse que difieran por la cantidad de sumandos. Una fórmula correcta es $\sum_{i=0}^{N} a_i = \sum_{i=2}^{N+2} a_{i-2}$.

Solución (b). Falso, basta casi cualquier ejemplo; $\sum_{i=2}^{3} 2^i = 12 \neq 60 = 2^2 \left(\frac{1-2^4}{1-2} \right)$. De hecho la fórmula es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n-1} q^i &= \sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\
&= \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{1-q^k}{1-q} \\
&= \frac{q^k - q^n}{1-q} = q^k \left(\frac{1-q^{n-k}}{1-q} \right).
\end{aligned}
$$

Solución (c). Falso. toma $n = 3$, $k = 2$, con lo que tenemos $\binom{2}{0} + \binom{3}{1} = 2 \neq 6 = \binom{4}{2}$. (Como antes, hay muchos contraejemplos).