Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Resueltos 2

1. Simplificar y calcular según corresponda:

   (a) $\binom{8}{4}+2\binom{8}{5}+3\binom{8}{6}$.

   (b) $\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n}$.

   Solución (a). Por definición tenemos que $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!}$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{8}{4}+2\binom{8}{5}+3\binom{8}{6} &= \frac{8!}{(8-4)!\ 4!}+2\frac{8!}{(8-5)!\ 5!}+3\frac{8!}{(8-6)!\ 6!}\\ &= \frac{8!}{4!\ 4!}+\frac{2\cdot 8!}{3!\ 5!}+\frac{3\cdot 8!}{2!\ 6!}\\ &= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 4!}+\frac{2\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 5!}+\frac{3\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!}\\ &= 2\cdot 7\cdot 5+2\cdot 8\cdot 7+3\cdot 4\cdot 7\\ &= 70+112+84=166.\end{aligned}$$

   Solución (b). Escribimos lo que sabemos por definición y luego simplificamos;

$$\begin{aligned}\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n} &= \frac{(4n)!}{(4n-3n)!\ (3n)!}\cdot\frac{(3n)!}{(3n-2n)!\ (2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(2n-n)!\ n!}\\ &= \frac{(4n)!}{n!}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n!\ n!}=\frac{(4n)!}{(n!)^4}.\end{aligned}$$

2. En el desarrollo de $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ hallar el quinto término en la expansión del binomio, el término que contiene a x^5 y el término independiente de x.

   Solución. Por el teorema del binomio de Newton tenemos que

$$\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9=\sum_0^9\binom{9}{k}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^k\ \left(-\frac{1}{3x}\right)^{9-k}.$$

El j-ésimo término de esta expansión está dado por $a_k = \binom{9}{k-1}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{9-(k-1)}, \forall\, k \in \{1,\ldots,9\}$ (esta diferencia entre j y $j-1$ sucede pues la suma parte desde cero por lo que estrictamente hablando el primer término (1-ésimo término (?)) aparece cuando $k=0$, porejemplo), por lo que el quinto término corresponde a evaluar en la expresión $k=4$;

$$
\begin{aligned}
a_5 &= \binom{9}{4}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^4\left(-\frac{1}{3x}\right)^5 \\
&= -\frac{9!\cdot 3^4\cdot x^8}{4!\;5!\cdot 2^4\cdot 3^5\cdot x^5} \\
&= -\frac{21}{8}x^3.
\end{aligned}
$$

Buscamos ahora el término que contiene a x^5. Para esto vemos por ejemplo el $(k+1)$-ésimo término, donde la potencia de x corresponde a $x^{2k-(9-k)} = x^{3k-9}, \forall 9 \geq k \geq 0$. Queremos saber para cuales k sucede que $3k-9=5$. Se ve que para que esto suceda entonces $k=\frac{13}{3}$, pero como k es entero, no existe tal término en la expansión; dicho de otro modo, en esta expansión no aparecen términos con x^5.

Finalmente, el término libre de x lo buscamos de la misma forma; queremos los k tal que $0 = 3k-9$, lo que sucede sólo cuando $k=3$, por lo que el término que buscamos es el término que aparece cuando $k=3$ (que correspondería al cuarto término de la expansión);

$$
\begin{aligned}
a_4 &= -\binom{9}{3}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^3\left(\frac{1}{3x}\right)^6 \\
&= -\frac{9!\cdot 3^3}{3!\;6!\cdot 2^3\cdot 3^6} \\
&= -\frac{7}{3^5\cdot 2} = -\frac{7}{486}.
\end{aligned}
$$

3. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes:

   (a) $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$.

   (c) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0$.

Solución (a). Aplicamos directamente el teorema del binomio y manipulamos ligeramente las sumas para obtener lo que buscamos;

$$
\begin{aligned}
n(1+x)^{n-1} &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \; 1^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \; \frac{(n-1)!}{k! \; (n-1-k)!} \; x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!} \; x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \; \frac{n!}{k(k-1)! \; (n-k)!} \; x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \; \frac{n!}{k! \; (n-k)!} \; x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Solución (b). (Voy a tratar de explicar como se construyen (u ocurren) los trucos con los que uno resuelve ejercicios de este tipo. No es necesario leerlo, puedes pasar directo al desarrollo.)

Para poder encontrar la forma de calcular la suma nos gustaría poder usar el resultado obtenido anteriormente. En el caso particular de esta pregunta, ya sabemos a lo que queremos llegar, por lo que también voy a mirar esos términos para poder saber qué es lo que queremos hacer.

En la expresión de la pregunta anterior, si evaluamos $x = 1$, se tiene que $n(1+x)^{n-1} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, el cual es un término del resultado al que queremos llegar a partir de nuestra suma; $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (anoto estas igualdades de la suma partiendo desde cero por que así, si aparecen en los desarrollos, los reconozco más fácilmente). Una forma usual de agregar un término que nos gustaría que apareciera es en forma de un 0 en el caso de la suma o un 1 en caso del producto. Además, al haber coeficientes binomiales, los productos de números consecutivos se pueden usar con los factoriales. Dicho todo esto, justificamos de algún modo por qué uno querria justamente sumar ese cero;

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (k + k^2 - k) \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) \binom{n}{k} \\
&= n2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Trabajaremos ahora con la sumatoria que falta en la última expresión, notamos que el primer término de la suma es cero, por lo que lo sacamos y ajustamos los índices de las sumas como sigue;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\binom{n}{k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\frac{n!}{(k+2)!\ (n-k-2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!\ (n-k-2)!}.
\end{aligned}$$

(Notamos que esta expresión: $\frac{n!}{k!\ (n-k-2)!}$, es bastante similar a $\binom{n-2}{k} = \frac{(n-2)!}{k!\ (n-2-k)!}$, por lo que vamos a querer factorizar para que aparezca como sigue:)

$$\begin{aligned}
= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!\ (n-k-2)!} &= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)\frac{(n-2)!}{k!\ (n-k-2)!} \\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

(La última igualdad es aplicar directamente el teorema del binomio de Newton $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = (1+1)^{n-2} = 2^{n-2}$.)

Solución (c). Nuevamente me gustaría utilizar el resultado (a). Notamos que si consideramos $x = -1$ en la expresión de dicho ejercicio, se obtiene que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-1)^{k-1} = n(1+x)^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0.$