Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Álgebra, primer semestre 2020

Ejercicios ayudantía Resueltos

1. Usando las definiciones de igualdad e inclusión de conjuntos, muestre que

$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow A = B \ .$$

Demostración. Por definición tenemos que

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \ , \tag{1a}$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \ , \tag{1b}$$
$$A = B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B \ . \tag{1c}$$

También por definición de $\Leftrightarrow$ tenemos que $(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$, por lo tanto $((1) \wedge (2)) \Rightarrow A = B$.

Obviamente $A = B$ implica que $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Parece una caracterización arbitraria, pero usualmente en matemáticas se utiliza este resultado para demostrar que dos conjuntos son iguales, se le llama demostración por doble contención.

2. Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Demostración. Sea $(x \in B)$ cierto, entonces $(x \in B) \vee (x \in A)$ también es cierto, lo que por definición de unión de conjuntos es equivalente a decirque $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, es decir $B \subset (A \cup B)$ (definición de contención de conjuntos).

Sea ahora $x \in A \cup B$, entonces, por definición de unión de conjuntos, tenemos que $(x \in A) \vee (x \in B)$. Si $x \in A$, por hipótesis (o por enunciado como a algunos les gusta decir) siempre se da el caso de que $x \in B$, en otras palabras vemos que $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$, lo que por definición corresponde a decir $A \cup B \subset B$.

Como $B \subset (A \cup B)$ y $A \cup B \subset B$, por el ejercicio anterior tenemos que $A \cup B = B$.

La segunda igualdad se demuestra de forma análoga (Intenta demostrarla primero y después lee lo que sigue si quieres).

Sea $(x \in A)$ cierto, luego, por hipótesis, $(x \in B)$ también es cierto, por lo tanto $(x \in A) \Rightarrow ((x \in B) \wedge (x \in A))$, lo que, por definición de intersección de conjuntos y contención de conjuntos, es lo mismo que decir $A \subset A \cap B$.

Sea ahora $x \in A \cap B$, entonces, por definición de intersección de conjuntos, tenemos que $(x \in A) \wedge (x \in B)$, en particular $x \in A$, por lo tanto, como $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, $A \cap B \subset A$.

Como $A \subset (A \cap B)$ y $A \cap B \subset A$, tenemos que $A \cup B = B$.

3. Sean A un conjunto y U el conjunto universo. Demuestre las siguientes propiedades

   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

   Demostración (a).(Por definición de igualdad de conjuntos) Vemos que $(A \cup B)^c = \{x \mid x \notin A \cup B\}$. Como $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$, negando estas expresiones obtenemos que $(x \notin A \cup B) \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B))$, o equivalentemente (usando la definición del complemento de un conjunto), $(x \in (A \cup B)^c) \Leftrightarrow ((x \in A^c) \wedge (x \in B^c)) \Leftrightarrow (x \in A^c \cap B^c)$. En otras palabras (por definición de igualdad de conjuntos) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

   Demostración (b). (Doble contención) Sea $x \in (A \cap B)^c$, entonces $x \notin A \cap B$. Como $A \cap B = \{y \mid y \in A \wedge y \in B\}$ tenemos que $x \notin A \vee x \notin B$. Dicho esto, si $x \notin A$, entonces $x \in A^c$, por lo que además $x \in A^c \cup B^c$. Análogamente, si $x \notin B$, entonces $x \in B^c$, por lo tanto $x \in A^c \cup B^c$. Esto nos dice que $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$, es decir $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

   Sea ahora $x \in A^c \cup B^c$, entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$, es decir $x \notin A$ y $x \notin B$. Supongamos que $x \notin (A \cap B)^c$, entonces $x \in A \cap B$ (por definición de complemento), es decir $x \in A$ y $x \in B$ (definición de intersección), o lo que es equivalente a decir $x \notin A^c$ y $x \notin B^c$, lo que contradice que $x \in A^c \cup B^c$. Luego $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$, que es lo mismo que decir que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

   Como $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ y $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$, concluímos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

   Ejercicio: intentar demostrar (a) con doble contención y (b) por definición.

4. Demuestre usando inducción las siguientes afirmaciones:

   (a) $\forall n \geq 1$, $x + y$ divide a $x^{2n} - y^{2n}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   (c) Se definen los números $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mediante $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Afirmación: $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Demostración (a). Si $n = 1$, se tiene que $x^{2n} - y^{2n} = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, expresión que es divisible por $x + y$, por lo que nos sirve como caso base.

Supongamos ahora que $x + y$ divide a $x^{2n} - y^{2n}$. Por demostrar: $x + y$ divide a $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$.

$$
\begin{aligned}
x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} &= x^{2n+2} - y^{2n+2} \\
&= x^2(x^{2n} - y^{2^n}) + x^2 y^{2n} - y^2 y^{2n} \\
&= x^2(x^{2n} - y^{2^n}) + y^{2n}(x^2 - y^2) \\
&= x^2(x^{2n} - y^{2^n}) + y^{2n}(x + y)(x - y).
\end{aligned}
$$

Por hipótesis inductiva tenemos que ambos sumandos son divisibles por $x + y$, por lo que $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ también lo es. Concluímos que si n cumple la propiedad, entonces $n + 1$ también la cumple. Por inducción $\forall n \geq 1$, $x + y$ divide a $x^{2n} - y^{2n}$.

Demostración (b). Si $n = 1$ vemos que $\sum_1^n \frac{1}{i^2} = \sum_1^1 \frac{1}{i^2} = 1 \leq 2 - 1 = 2 - \frac{1}{n}$. Por lo tanto lo podemos usar de caso base. Supongamos que $\sum_1^n \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. Queremos demostrar que $\sum_1^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_1^{n+1} \frac{1}{i^2} &= \sum_1^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

Llegado a este punto sería ideal poder mostrar que $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1}$, pues de ser así, por la última desigualdad, tendriamos lo que queremos demostrar. Para que se me ocurra que es lo que tengo que hacer anotaré esto que me gustaría que pasara, y a través de pasos reversibles llegaré a algo que me parezca cierto o demostrable más fácilmente (formalmente al responder una pregunta, estos pasos no se escriben ni se explican, pero no está mal si los ponen).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
\frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{2n+1}{(n+1)n} \\
\frac{1}{(n+1)} &\leq \frac{2n+1}{n} \\
\frac{n}{(n+1)} &\leq 2n+1
\end{aligned}
$$

Esto último parece algo razonable, pues el cociente entre un entero positivo n y su sucesor es menor a 1, en particular menor que $2n+1$. Por lo tanto, la demostración se vería así:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{(n+1)} &\leq 1 \\
\frac{n}{(n+1)} &\leq 2n+1 \\
\frac{1}{(n+1)} &\leq \frac{2n+1}{n} \\
\frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{2n+1}{(n+1)n} \\
\frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Demostración (c). Si $n = 1$ tenemos que $a_n = a_1 = \sqrt{2} < 2$. Suponemos ahora que $a_n < 2$. Queremos demostrar que $a_{n+1} < 2$. Vemos que $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 * 2} = 2$. Por inducción concluímos que $\forall n \geq 1,\ a_n < 2$.

5. Encuentre el valor de las siguientes sumatorias:

   (a) $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i\ i^2$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}$.

   Demostración (a). Notamos que los términos de índice impar de la sumatoria tienen signo negativo y los de índice par tienen signo positivo, luego los podemos juntar en sumas separadas los que tengan el mismo signo;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i\ i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i}(2i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i-1}(2i-1)^2 \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} 4i^2 - 4i + 1 \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n = 2n^2 + 2n - n = n(2n+1).
\end{aligned}$$

   Demostración (b). Puede que haya menos confusión si es que usamos paréntesis $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}\right)$. Notamos que el término 2^i es una constante con respecto a la suma más próxima que depende de j, por lo que podemos factorizarlo fuera de dicha suma, pero luego la suma entera que queda es independiente de i, por lo que toda esa suma es factorizable, tal como se ve en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2^{i+j}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2^{i}2^{j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(2^{i}\left(\sum_{j=1}^{n}2^{j}\right)\right)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}2^{j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2^{i}\right)\\ &= \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-1\right)^{2} = (2^{n+1}-1)^2.\end{aligned}$$

6. Usando progresión aritmética (P.A.) o progresión geométrica (P.G.) resuelva:

   (a) La suma de los 50 primeros términos de una P.A. es 200 y la suma de los 50 términos siguientes es 2700. Determine la P.A.

   (b) El cuarto término de una P.G. es 54 y el séptimo es $\frac{729}{4}$. Determine la P.G.

Solución (a). Una P.A. es una suma de la forma $\sum_{k=0}^{n} A + k\,d = (n+1)A + d\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, por lo que determinaremos esta progresión al conocer A y d. El enunciado nos da la siguiente información;

$$\begin{aligned}200 = \sum_{k=0}^{49} A + k\,d &= 50A + d\left(\frac{49\cdot 50}{2}\right)\ ,\\ &\Rightarrow 8 = 2A + 49d\\ \sum_{k=50}^{99} A + k\,d &= 2700.\end{aligned}$$

Notamos ahora que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{99} A + k\,d &= \sum_{k=0}^{49} A + k\,d + \sum_{k=50}^{99} A + k\,d\ ,\\ \sum_{k=0}^{99} A + k\,d &= 200 + 2700\ ,\\ &\Rightarrow 2900 = 100A + d\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)\ ,\\ &\Rightarrow 58 = 2A + 99d.\end{aligned}$$

Dicho todo esto, para poder determinar la P.A. basta resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8 &= 2A + 49d \\ 58 &= 2A + 99d \\ &\Rightarrow 50 = 50d \Rightarrow d = 1 \\ &\Rightarrow A = -\frac{41}{2}. \end{aligned}$$

Solución (b). Una A.G. es una suma de la forma $\sum_{k=0}^{n} Ar^k = A\left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)$ (esta fórmula es válida cuando $r \neq 1$. Cuando $r = 1$ la suma simplemente es la suma de una constante $\sum_{k=0}^{n} A = A(n+1)$), por lo que el enunciado nos da la siguiente información (considerando que el cuarto término de esta suma corresponde al término de índice 3 pues partimos contando desde 0);

$$\begin{aligned} Ar^3 &= 54 \\ Ar^6 &= \frac{729}{4} \\ &\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{729}{4 \cdot 54}} \\ &\Rightarrow A = \frac{54}{\sqrt[3]{\frac{729}{216}}}. \end{aligned}$$

(Esos números se pueden pasar por calculador a o algunas simplificaciones sin gustan, pero hasta acá por lo menos se puede llegar sin realizar ningún cálculo.)