Una forma en que el límite de f cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda no existe es cuando los valores de $f(x)$ a medida que x se acerca a c no tienen cota superior o no tienen cota inferior.

Definición: $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c^+

Diremos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c por la derecha si los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la derecha son positivos y dado cualquier número positivo M existe un intervalo $V =]c, c+h[$ tal que para todo $x \in V$ se satisface que $f(x) > M$.

Denotaremos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$

Definición: $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a c^+

Diremos que $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a c por la derecha si los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la derecha son negativos y dado cualquier número negativo M existe un intervalo $V =]c, c+h[$ tal que para todo $x \in V$ se satisface que $f(x) < M$.

Denotaremos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$

Definición: $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c^-

Diremos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a c por la izquierda si los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la izquierda son positivos y dado cualquier número positivo M existe un intervalo $V =]c-h, c[$ tal que para todo $x \in V$ se satisface que $f(x) > M$.

Denotaremos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$

Definición: $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a c^-

Diremos que $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a c por la izquierda si los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la izquierda son negativos y dado cualquier número negativo M existe un intervalo $V =]c-h, c[$ tal que para todo $x \in V$ se satisface que $f(x) < M$.

Denotaremos

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Propiedad 1

a) Si $\lim_{x \to c^+} f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x > c$ entonces $\lim_{x \to c^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

b) Si $\lim_{x \to c^+} f(x) = 0$ y $f(x) < 0$ para $x > c$ entonces $\lim_{x \to c^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

c) Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para $x < c$ entonces $\lim_{x \to c^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

d) Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = 0$ y $f(x) < 0$ para $x < c$ entonces $\lim_{x \to c^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Demostremos a)

Sea $M > 0$ necesitamos encontrar un intervalo $V =]c, c + h[$ tal que para todo $x \in V$ se cumpla que $\frac{1}{f(x)} > M$. Como además $f(x) > 0$ para $x > c$ entonces $f(x) < \frac{1}{M}$

Pero sabemos que $\lim_{x \to c^+} f(x) = 0$, esto significa que dado $\varepsilon = \frac{1}{M}$ existe un intervalo $V =]c, c + \delta[$ tal que para todo $x \in V$ se cumpla que $|f(x)| < \frac{1}{M}$. Como $f(x) > 0$

para todo $x \in V$ entonces $f(x) < \frac{1}{M}$ y por lo tanto $f(x) > M$.

Luego Dado $M > 0$ existe $V =]c, c + \delta[$ tal que para todo $x \in V$ se cumple que $\frac{1}{f(x)} > M$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad y \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ejemplo 2

Sea $f: IR - \{0,1\} \to IR,\ \ f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ y $g: IR - \{1\} \to IR,\ \ g(x) = \frac{-1}{x-1}$

Determinar

a) $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ y $\lim_{x \to 1^-} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Solución

Determinemos $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-1}{x-1}$

Tenemos que $g(x) = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ y $\boldsymbol{x > 1}$. Luego $\boldsymbol{1 - x < 0}$ y además $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^+} 1 - x \; = 0}$,

Por lo tanto

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{x - 1}} = -\infty$$

Ahora determinemos $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-1}{x-1}$

Tenemos que $g(x) = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ y $\boldsymbol{x < 1}$. Luego $\boldsymbol{1 - x > 0}$ y además $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x \; = 0}$,

Por lo tanto

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{x - 1}} = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - x}$

Tenemos que

$$\frac{1}{x^2 - x} = \boldsymbol{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Y $x > 1 > 0$ luego $\boldsymbol{(x - 1) > 0}$ **y por lo tanto** $\boldsymbol{x(x - 1) > 0}$**.**

Además $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^-} x(x - 1) \; = 0}$ **por lo tanto**

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - x} \; = +\infty$$

Ahora determinemos $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - x}$

Tenemos que

$$\frac{1}{x^2 - x} = \boldsymbol{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Y $0 < x < 1$ luego $(\boldsymbol{x-1}) < \boldsymbol{0}$ **y por lo tanto** $\boldsymbol{x(x-1) < 0}$**.**

Además $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to 1^-}} \boldsymbol{x(x-1)} = \boldsymbol{0}$ **por lo tanto**

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x}$

Tenemos que

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x(x-1)}}$$

Y $0 < x < 1$ luego $(\boldsymbol{x-1}) < \boldsymbol{0}$ **y por lo tanto** $\boldsymbol{x(x-1) < 0}$**.**

Además $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to 0^+}} \boldsymbol{x(x-1)} = \boldsymbol{0}$ **por lo tanto**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

Ahora $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2 - x}$

Tenemos que

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x(x-1)}}$$

Y $x < 0 < 1$ luego $(\boldsymbol{x-1}) < \boldsymbol{0}$ **y por lo tanto** $\boldsymbol{x(x-1) > 0}$**.**

Además $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to 0^+}} \boldsymbol{x(x-1)} = \boldsymbol{0}$ **por lo tanto**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

Ejercicio propuesto

Calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4}$ y $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4}$

Propiedad 2

Si $\lim\limits_{x \to c^\pm} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c^\pm} g(x) = +\infty$ entonces

a) $\lim\limits_{x \to c^\pm} f(x) + g(x) = +\infty$

b) Si $L > 0$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = +\infty$

c) Si $L < 0$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = -\infty$

Propiedad 3

Si $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c^{\pm}} g(x) = -\infty$ entonces

a) $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) + g(x) = -\infty$

b) Si $L > 0$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = -\infty$

c) Si $L < 0$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = +\infty$

Ejemplos

Determinar

a) $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{+}} \frac{x+3}{2x-3}$ y $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{-}} \frac{x+3}{2x-3}$

b) $\lim_{x \to -2^{+}} \left(\sqrt{x^2+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$

c) $\lim_{x \to -1^{+}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ y $\lim_{x \to -1^{-}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

Propiedad 4

I.- Si $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to c^{\pm}} g(x) = +\infty$ entonces

a) $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) + g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = +\infty$

II.- $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to c^{\pm}} g(x) = -\infty$ entonces

a) $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) + g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = +\infty$

III.-Si $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to c^{\pm}} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)g(x) = -\infty$

IV.-_Si $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ entonces $\lim_{x \to c^{\pm}} \frac{1}{f(x)} = 0$