# P1/ Simplifique

⑪ $a^2+3a+2$

a) $$\underset{①}{\frac{1}{1-a^2}}\cdot\frac{\overset{④}{a^3-1}}{\underset{②}{a^2-a+1}}\cdot\frac{\overset{⑤}{a^3+1}}{\underset{③}{a^2+a+1}}+\frac{\overset{⑥}{(a^2+11a+10)}\overset{⑩}{(a^3-3a^2+3a-1)}}{\underset{⑦}{(a^2-1)^2}\underset{⑧}{(a^2+9a-10)}\underset{⑨}{(a+2)}}$$

factoricemos:

① $1-a^2=(1+a)(1-a) \longrightarrow \boxed{R_1:\ a=\pm 1}$

② $a^2-a+1 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot1=-3<0$

$\therefore$ Esto nunca es cero!

③ $a^2+a+1 \longrightarrow \Delta=1-4\cdot1\cdot1=-3<0$

④ $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

⑤ $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

Simplificando el primer sumando:

$$\frac{1}{\cancel{(1+a)}\cancel{(1-a)}}\cdot\frac{\overset{(-)}{\cancel{(a-1)}}\cancel{(a^2+a+1)}}{\cancel{a^2-a+1}}\cdot\frac{\cancel{(a+1)}\cancel{(a^2-a+1)}}{\cancel{a^2+a+1}}=-1$$

Ahora, el segundo:

⑥ $a^2+11a+10=(a+10)(a+1)$

⑦ $(a^2-1)^2=(a+1)^2(a-1)^2 \longrightarrow$ misma restricción, $a\neq\pm1$

⑧ $a^2+9a-10=(a+10)(a-1) \longrightarrow R_2: a\neq 1, \boxed{a\neq-10}$

⑨ $a+2 \longrightarrow R_3: \boxed{a\neq-2}$

⑩ $a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3$

⑪ $a^2+3a+2=(a+2)(a+1)$

Simplificando

$$\frac{\cancel{(a+10)}\cancel{(a+1)}\cancel{(a-1)}^3\cancel{(a+2)}\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}^2\cancel{(a+1)}^2\cancel{(a+10)}\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}} = 1$$

luego, queda $-1+1=0$

$(\text{con } a \neq \pm 1, -10, -2)$

b) $\dfrac{2-c}{c^2+c-6} + \dfrac{5}{9-c^2} - \dfrac{4-c}{c^2-7c+12}$

① ② ③

Restricciones:

① $c^2+c-6 \neq 0 \iff (c+3)(c-2) \neq 0 \iff \boxed{c \neq 2, -3}$

② $9-c^2 \neq 0 \iff (3+c)(3-c) \neq 0 \iff \boxed{c \neq \pm 3}$

③ $c^2-7c+12 \neq 0 \iff (c-3)(c-4) \neq 0 \iff \boxed{c \neq 3, 4}$

Simplificando:

$$\frac{(-)\cancel{2-c}}{(c+3)\cancel{(c-2)}} + \frac{5}{(3+c)(3-c)} + \frac{\cancel{4-c}}{(c-3)\cancel{(c-4)}}$$

$$= \frac{-1}{c+3} \cdot \frac{c-3}{c-3} - \frac{5}{(c+3)(c-3)} + \frac{1}{c-3} \cdot \frac{c+3}{c+3}$$

$$= \frac{3-\cancel{c}-5+\cancel{c}+3}{(c+3)(c-3)} = \boxed{\frac{1}{c^2-9}}$$

P2 | verdadero o falso

a) sean $b, d \neq 0$. Luego, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

Verdadero!

$\Rightarrow)$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{\text{def. fracciones}}{\Longrightarrow} a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \overset{\cdot b \cdot d}{\Longrightarrow} a \cdot b^{-1} \cdot b \cdot d = c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot d$

$\overset{\text{asoc. y comm.}}{\Longrightarrow} a(b^{-1} \cdot b) \cdot d = c(d^{-1} \cdot d) \cdot b \overset{\text{inv. multiplicativo}}{\Longrightarrow} a \cdot 1 \cdot d = c \cdot 1 \cdot b$

$\overset{\text{neutro y comm.}}{\Longrightarrow} ad = bc$

$\Leftarrow)$ $ad = bc \overset{\cdot d^{-1} \cdot b^{-1}}{\Longrightarrow} ad \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} = b \cdot c \cdot d^{-1} \cdot b^{-1}$ ya que $b, d \neq 0$ $\overset{\text{inv. y comm.}}{\Longrightarrow}$

$a \cdot 1 \cdot b^{-1} = c \cdot b b^{-1} d^{-1} \overset{\text{inv}}{\Longrightarrow} a \cdot 1 \cdot b^{-1} = c \cdot 1 \cdot d^{-1} \overset{\text{neutro}}{\Longrightarrow}$

$ab^{-1} = c \cdot d^{-1} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ∎

def. fracciones

b) $\forall b \in \mathbb{R}, \sqrt{b^2} = b$

Falso! contraejemplo, $b = -1$:

$\rightarrow \sqrt{b^2} = \sqrt{1} = 1 \neq b = -1$

c) $\forall x,y \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y}$

falso! contraejemplo: $x=9,\ y=16$

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} = 3+4 = 7 \neq \sqrt{x+y} = \sqrt{25} = 5$

P3 Demuestre que $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Dem: Note que $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$

$\Leftrightarrow (a^{-1}b^{-1})(ab) = 1$ Definición de inv. multiplicativo.

y como:

$(a^{-1}b^{-1})(a\cdot b) \overset{\text{comm. y asoc.}}{=} (a^{-1}a)(b^{-1}b) \overset{\text{inv}}{=} 1\cdot 1 \overset{\text{neutro}}{=} 1$

concluimos que $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ ▨

b) Demuestre que si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y $b,d \neq 0$, entonces $ab^{-1}+cd^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1}$

Dem: $(ad+bc)(bd)^{-1} \overset{\text{dist.}}{=} ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1}$

$\overset{\text{propiedad anterior}}{=} ad(b^{-1}d^{-1}) + bc(b^{-1}d^{-1}) \overset{\text{comm. y asoc.}}{=} add^{-1}b^{-1} + cbb^{-1}d^{-1}$

$\overset{\text{inv}}{=} a\cdot 1\cdot b^{-1} + c\cdot 1\cdot d^{-1} \overset{\text{neutro}}{=} ab^{-1} + cd^{-1}$ ▨

**P4** $a \oplus b := \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$

a) Pruebe que $\oplus$ es conmutativa

<u>Dem:</u> En efecto, $a \oplus b \underset{\text{def. } \oplus}{=} \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$

$$\underset{\text{comm. de } +}{=} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \underset{\text{def. } \oplus}{=} b \oplus a$$

b) Pruebe que $\oplus$ no es asociativa

<u>Dem:</u> contraejemplo:

• $(1 \oplus 2) \oplus 3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right) \oplus 3 = \frac{5}{2} \oplus 3$

$$= \frac{5/2}{3} + \frac{3}{5/2} = \frac{5}{6} + \frac{6}{5} = \frac{25+36}{30} = \frac{61}{30} //$$

Pero • $1 \oplus (2 \oplus 3) = \dfrac{1}{2 \oplus 3} + \dfrac{2 \oplus 3}{1}$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{13/6} + 13/6 = \frac{6}{13} + \frac{13}{6}$$

$$= \frac{36 + 169}{78} = \frac{205}{78} //$$

¡Son diferentes!