

# Trigonometría

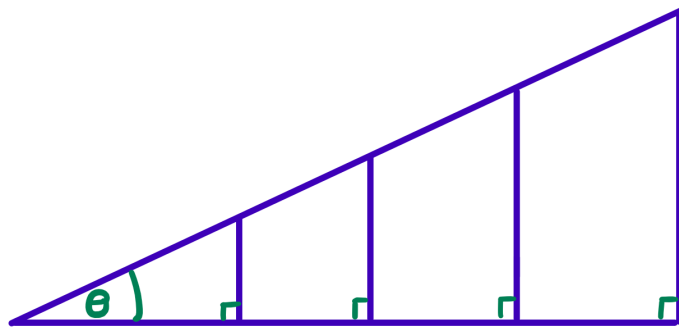
Benja Vera

Enero 2019

## Primeros Pasos: Trigonometría en Triángulos

En la mayoría de los libros introductorios, la trigonometría se enseña siguiendo básicamente la misma secuencia: primero se calculan las razones básicas y luego se utilizan para determinar longitudes y ángulos en ciertas construcciones. Ese es el primer y más inmediato uso para la trigonometría, relacionar ángulos con longitudes.

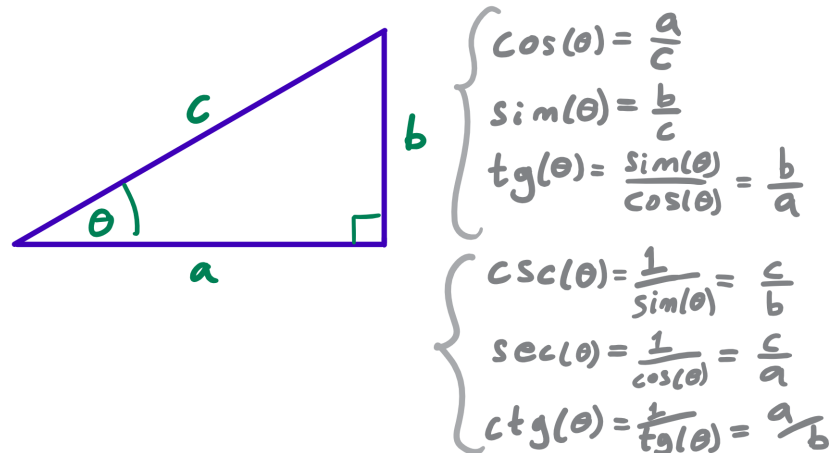
Primero, miremos esta imagen:



Tenemos una serie de triángulos rectángulos, y todos ellos comparten un ángulo común  $\theta$ . Ya que son rectángulos, sabemos que comparten otro ángulo más, a saber,  $\frac{\pi}{2}$  (Para intenciones de este documento estaremos midiendo en radianes). Esta observación nos lleva a concluir que todos estos triángulos deben ser semejantes. Y esto implica que todas las razones entre sus lados correspondientes se conservan. En otras palabras, **para todo triángulo de esta imagen, la razón entre, por ejemplo, el cateto opuesto a  $\theta$  y la hipotenusa es una constante**. Por lo tanto, sin importar el tamaño del triángulo, esta razón es la misma, esto es solo porque hicimos la construcción de tal modo que todos los triángulos son rectángulos y comparten un ángulo común  $\theta$ . Por lo tanto, esta razón común a todos los triángulos depende del valor de  $\theta$  que escojamos. Ya que es una constante, nos sería conveniente darle un nombre, y dicho nombre será  $\sin \theta$ . Esto puede sonar como un argumento confuso, pero es la razón por la cual decir algo como  $\sin \frac{\pi}{3}$  tiene sentido.

Es solo una constante, un número. Y por lo tanto, podemos utilizarlo para extraer información sobre longitudes que no conocemos.

El resto de las razones trigonométricas se definen así:



Luego, por ejemplo, la secante de  $\theta$  es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente (recuerda que estas posiciones pueden cambiar dependiendo de la orientación del triángulo).

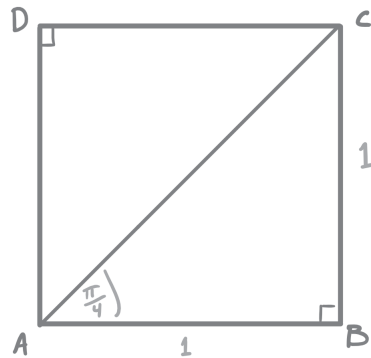
**Pequeño Ejercicio:** Intenta volver a dibujar la figura de arriba y escribe las razones para una versión rotada o reflejada de este triángulo.

## Algunas razones conocidas: El sueño de Pitágoras

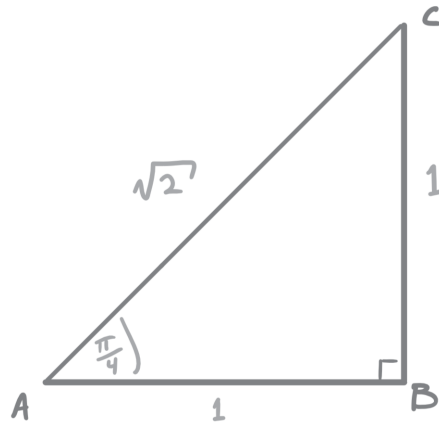
En esta sección, vamos a usar algunas herramientas de geometría básica para calcular algunas razones trigonométricas conocidas. Es decir, aquellas para ángulos como  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{6}$ .

### Medio cuadrado y las razones de 45 grados

Consideremos un cuadrado, y ya que estamos hablando de razones y por lo tanto las longitudes mismas no importan, digamos por conveniencia que el cuadrado tiene lado 1 (Si no te convence esta elección, intenta llamarlo  $a$  y observa que se cancelará dejando el mismo resultado)



Bajo estos supuestos, podemos deducir que la diagonal  $\overline{AC}$  mide  $\sqrt{2}$  por Teorema de Pitágoras, y ya que forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  con el lado  $\overline{AB}$ , esta construcción nos es conveniente para calcular las razones trigonométricas de  $\frac{\pi}{4}$ . Aislemos el triángulo:



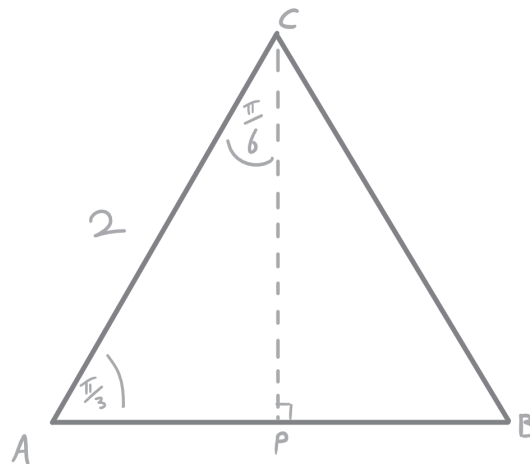
De aquí, calculamos:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

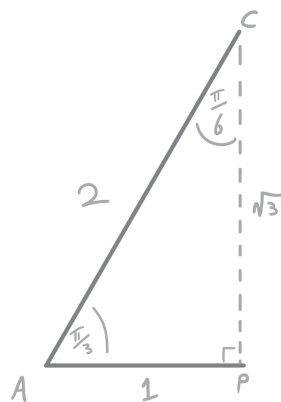
$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

### Medio triángulo equilátero y las razones de 30/60 grados

Hagamos el mismo truco de antes pero con un triángulo equilátero y tracemos su altura. Esta vez, por conveniencia, vamos a definir la longitud de su lado como 2. Esta elección, cabe volver a destacar, es únicamente para obtener números bonitos durante el desarrollo.



Ya que el triángulo es equilátero, su altura bisecta el ángulo  $\angle ACP$ , de aquí deducimos el ángulo  $\frac{\pi}{6}$  de arriba. La altura también intersecta  $\overline{AB}$  en su punto medio, por lo tanto deducimos que la longitud de  $\overline{AP}$  es 1. De aquí, podemos volver a utilizar Pitágoras para encontrar la longitud de  $\overline{CP}$ . Un cálculo corto nos entrega como resultado  $\sqrt{3}$ . Marquemos esto y aislemos la mitad izquierda del triángulo:



De aquí, deducimos muchas cosas:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

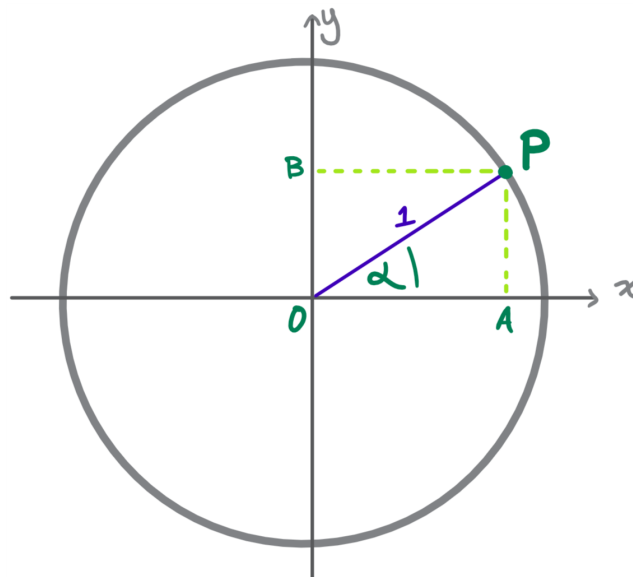
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Existen otras construcciones más extrañas que podríamos hacer para encontrar otras razones trigonométricas como esta: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_00oskWLtII](https://www.youtube.com/watch?v=_00oskWLtII) pero un curso escolar o universitario solo asumirá conocimiento de las construcciones anteriores para tratar sus resultados como “razones conocidas”

## Trigonometría en el Círculo Unitario

Hasta ahora, hemos visto la trigonometría solo en el contexto de razones entre longitudes en un triángulo rectángulo. Esto por sí solo es bastante poderoso y tiene una multitud de aplicaciones: desde las mas obvias como medir alturas de objetos en base a sus sombras, hasta las más elaboradas como manejar la perspectiva 3D al programar un motor de gráficos para videojuegos<sup>1</sup>. Pero ya que nuestras definiciones actuales para seno y coseno requieren que un triángulo sea rectángulo, solo pueden funcionar para ángulos entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$  no incluyéndolos. Por lo tanto, motivados por la idea de extender lo que conocemos y ver cómo se comporta en un nuevo contexto, llevaremos nuestras ideas a un plano de coordenadas.

Consideremos un círculo de radio 1 centrado en el origen. Vamos a referirnos muy seguido a puntos en este círculo que poseen un cierto ángulo de elevación desde el eje  $x$ . Para formalizar esta idea, vamos a definir los ángulos como positivos si van hacia arriba del eje y negativos hacia abajo. Puede que te sea conveniente pensar en el movimiento que este punto describe conforme gira en torno al origen. Esta va a ser nuestra construcción principal:



La construcción está hecha de tal modo que la longitud de  $\overline{OA}$  corresponde a la coordenada  $x$  de  $P$  y la longitud  $\overline{OB}$  corresponde a su coordenada  $y$ .

La conexión entre esto y nuestra trigonometría anterior viene de que aún podemos encontrar triángulos rectángulos en esta construcción sin importar donde esté  $P$ . Consideremos por ejemplo el triángulo  $\triangle OAP$ . Ya que estamos en un plano y los marcadores  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  denotan las coordenadas de  $P$ , deben ser paralelos a sus correspondientes ejes. Y ya que por definición son perpendiculares

<sup>1</sup>Nota aparte: Esta aplicación no es solo trigonometría. Muchas herramientas matemáticas más avanzadas como matrices de rotación y quizá incluso cuaterniones son requeridas para programar algo como esto. Pero la trigonometría es una de las partes más importantes de todo el proceso. Más información aquí: <https://youtu.be/zjMuIxRvygQ>

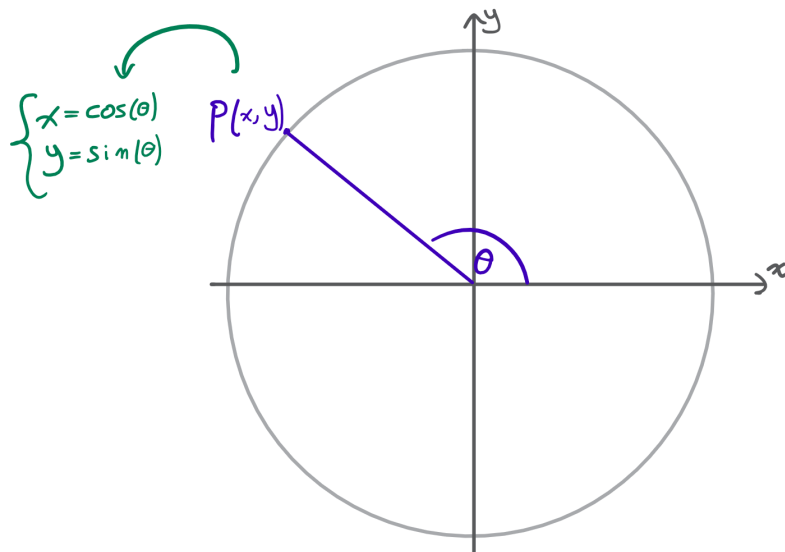
entre sí, deducimos que los ángulos  $\angle PAO$  y  $\angle PBO$  deben medir  $\frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto... tenemos triángulos rectángulos. Pero esta construcción es más poderosa que eso.

Observamos que  $\sin \alpha$  es la longitud de  $\overline{AP}$  (es decir, la coordenada  $y$  de  $P$ ) dividida por la hipotenusa, pero recordemos que la hipotenusa es el radio del círculo, ¡el cual mide 1! Luego,  $\sin \alpha = \overline{AP}$ . Del mismo modo, concluimos que  $\cos \alpha = \overline{BP} = \overline{OA}$ .

Más aún, si tienes algo de familiaridad con los radianes, puede que recuerdes que en un círculo de radio  $r$  unidades, un ángulo  $\alpha$  cubre una longitud de arco de exactamente  $r\alpha$  unidades. ¡Esa es la ventaja de los radianes! por lo tanto, en este círculo unitario, la longitud de arco entre el eje  $x$  y el punto  $P$  es exactamente... bueno...  $\alpha$  unidades (Medido en las mismas unidades en las que medimos el radio).

Por lo tanto, pensar en seno y coseno como las coordenadas de un punto en el círculo unitario resulta ser útil ya que preserva las construcciones de triángulos que hicimos en la sección anterior. Pero también nos sugiere algo más. **El punto  $P$  no tiene por qué estar en el primer cuadrante**, también podría estar a la izquierda del eje  $y$  o incluso debajo del eje  $x$ . eso significaría que el ángulo asociado al punto  $P$  sería mayor a  $\frac{\pi}{2}$  (O negativo, depende de en qué orientación quieras medir ángulos) Pero aquí, las construcciones geométricas son extrañas y todas las definiciones de seno y coseno como razones entre lados de triángulos no tienen sentido. Algunas longitudes quedan negativas y toda nuestra maquinaria geométrica anterior se cae.

Pero ya que todo funciona bastante bien en el primer cuadrante e imaginar seno y coseno como coordenadas mas que solo razones parece una idea bastante natural, hacemos lo que los matemáticos hacen por excelencia: **Extendemos nuestra idea anterior y redefinimos las expresiones  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  como las coordenadas de un punto en el círculo unitario que describe un ángulo  $\theta$  desde el eje  $x$ :**

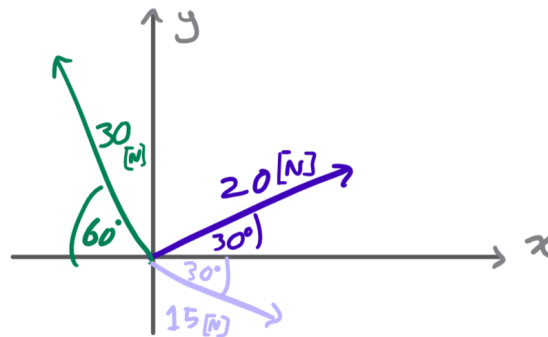


**Una aplicación: Proyección de vectores**

El física se nos dice que la fuerza neta sobre un objeto (esto es, la suma de todas las fuerzas actuando sobre él) es, por la segunda ley de Newton, igual al producto entre su masa y su aceleración. Esto se escribe como:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Pero esta ecuación, cabe destacar, es una ecuación vectorial. Y esa suma de fuerzas a la izquierda es una suma vectorial. En el colegio, donde toda la física es unidimensional, esto solo significa que sumas la fuerza si apunta en la dirección positiva y la restas si apunta en la dirección negativa. Pero para fuerzas en dos dimensiones, esto no funciona tan fácilmente. Imagina este escenario:



Aquí, un objeto en el origen estaría sintiendo las fuerzas descritas por esos tres vectores y nuestra misión es calcular la fuerza neta y, usando la segunda ley, su vector aceleración (considera un objeto de masa, digamos, 50 kg). Para poder sumar y restar como corresponda, necesitaríamos que las fuerzas actúen en el mismo eje y la forma más fácil de hacerlo es simplemente proyectar cada una sobre los ejes  $x$  e  $y$ . De este modo, sumamos y restamos en cada eje por separado, cosa que nos entrega la fuerza neta expresada como la suma de sus componentes. Los cálculos mismos se dejan como ejercicio.

## De vuelta al círculo unitario: Algunas identidades útiles

Ahora, con todas estas herramientas y definiciones, expresiones como  $\sin(0)$  nos hacen sentido y podemos calcularlas ( $\sin(0) = 0$  ya que un punto en el eje  $x$  tiene coordenada  $y$  igual a 0). Y dedicaremos esta sección a estudiar lo que sucede con las razones trigonométricas si desplazamos los ángulos por valores como  $\pi$ ,  $2\pi$  o  $\frac{\pi}{2}$ .

### $2\pi$ : Una vuelta completa

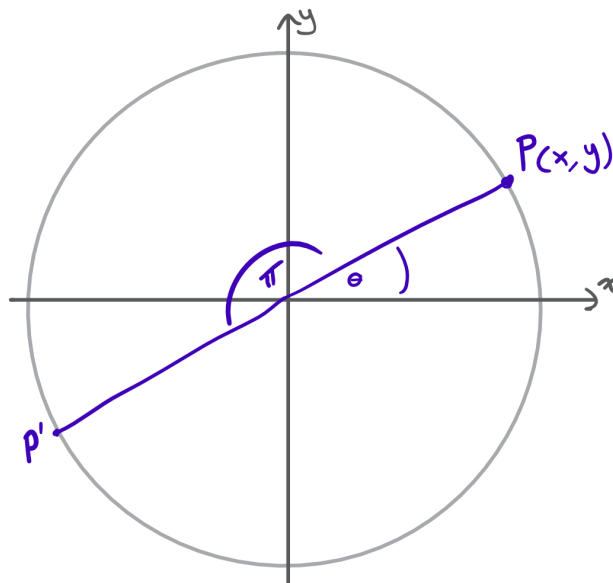
Aquí no hace falta imagen. Si el punto da una vuelta completa respecto de su ángulo inicial, simplemente vuelve a donde comenzó y sus coordenadas no cambian. Por lo tanto deducimos:

$$\sin(\theta \pm 2\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta \pm 2\pi) = \cos \theta$$

### $\pi$ : Reflejo respecto del origen

Aquí está nuestra construcción:



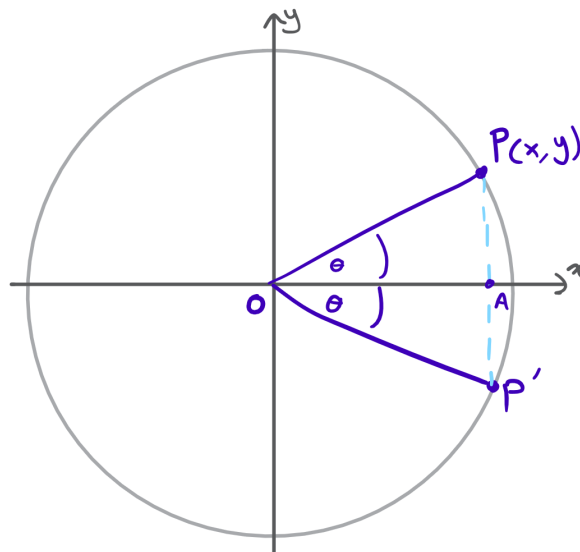
Ya que reflejamos en torno al origen, el punto termina con las mismas coordenadas pero con signo invertido. Luego, si  $P$  tiene coordenadas  $(x, y)$ , entonces  $P'$  debe tener coordenadas  $(-x, -y)$ . En otras palabras, rotar por  $\pi$  radianes tiene el efecto de cambiar los signos.

$$\sin(\theta \pm \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta \pm \pi) = -\cos \theta$$

Aquí, al igual que antes, los signos  $\pm$  los ponemos porque no importa el sentido de la rotación, el resultado es el mismo.

### $-\theta$ : Ángulos negativos



Aquí, el ángulo  $-\theta$  es descrito por el punto  $P'$  ya que se encuentra  $\theta$  radianes bajo el eje horizontal. Mediante algo de geometría, se puede demostrar que los triángulos  $\triangle OAP$  y  $\triangle OAP'$  son congruentes, demostrando así que si  $P$  tiene coordenadas  $(x, y)$ , las coordenadas de  $P'$  son  $(x, -y)$ . Y esto implica que invertir el signo de  $\theta$  preserva el coseno del ángulo e invierte el seno. En otras palabras:

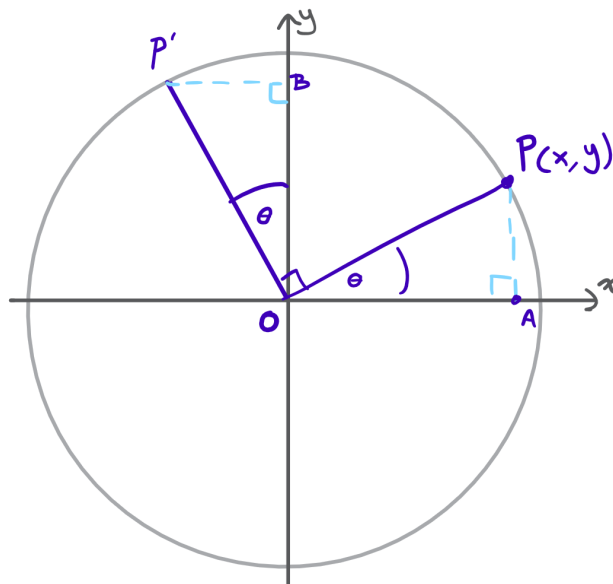
$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$\frac{\pi}{2}$ : Rotación en 90 grados

Esta demostración se divide en dos partes, el caso donde analizamos  $\theta + \frac{\pi}{2}$  y el caso  $\theta - \frac{\pi}{2}$ . El primer caso es geométrico y el segundo es algebraico (Podríamos hacer una construcción y llevaría a la respuesta correcta, pero tomaremos el otro camino en honor a probar algo interesante).

Primero, geometría:



Observamos que por construcción, el punto  $P'$  está a exactamente  $\frac{\pi}{2} + \theta$  radianes del eje  $x$ . Y un pequeño argumento geométrico nos lleva a probar que los triángulos  $\triangle OAP$  y  $\triangle OBP'$  son congruentes. De aquí deducimos que  $\overline{OA} = \overline{OB}$  y  $\overline{AP} = \overline{BP'}$ . Luego, las coordenadas de  $P'$  son  $(-y, x)$ . Advertencia: ten mucho cuidado con los signos y posición de cada coordenada. Como ejercicio, intenta repetir este mismo argumento pero con  $P$  en otro cuadrante del plano. El resultado debería ser el mismo si nombras  $P$  como  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \theta\end{aligned}$$

Ahora, el álgebra, El truco que utilizaremos consiste en expresar  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$  en términos de cosas que ya sabemos cómo manejar. Y lo podemos hacer como sigue:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right)$$

Ya que sabemos que rotar por  $\pi$  radianes cambia el signo del seno, la expresión del lado derecho es igual a  $-\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ . ¡Pero también sabemos cómo reducir eso! Nos da simplemente  $-\cos\theta$ . Luego:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$$

Un procedimiento análogo da una identidad similar para el coseno:

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right) = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$$

En otras palabras:

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$$

Uniendo estas identidades con el otro caso da:

$$\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos\theta$$

$$\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\theta$$

Para terminar este documento, aquí hay un búho:

