

P1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = |x-3| + |3-x|$

a) $a \leq 3$ $\begin{matrix} a \leq 3 & | & -1 \\ -a \geq -3 \end{matrix}$

$f(a) = |a-3| + |3-a|$
 $\begin{matrix} 3-a \geq 0 \\ (-) \end{matrix}$

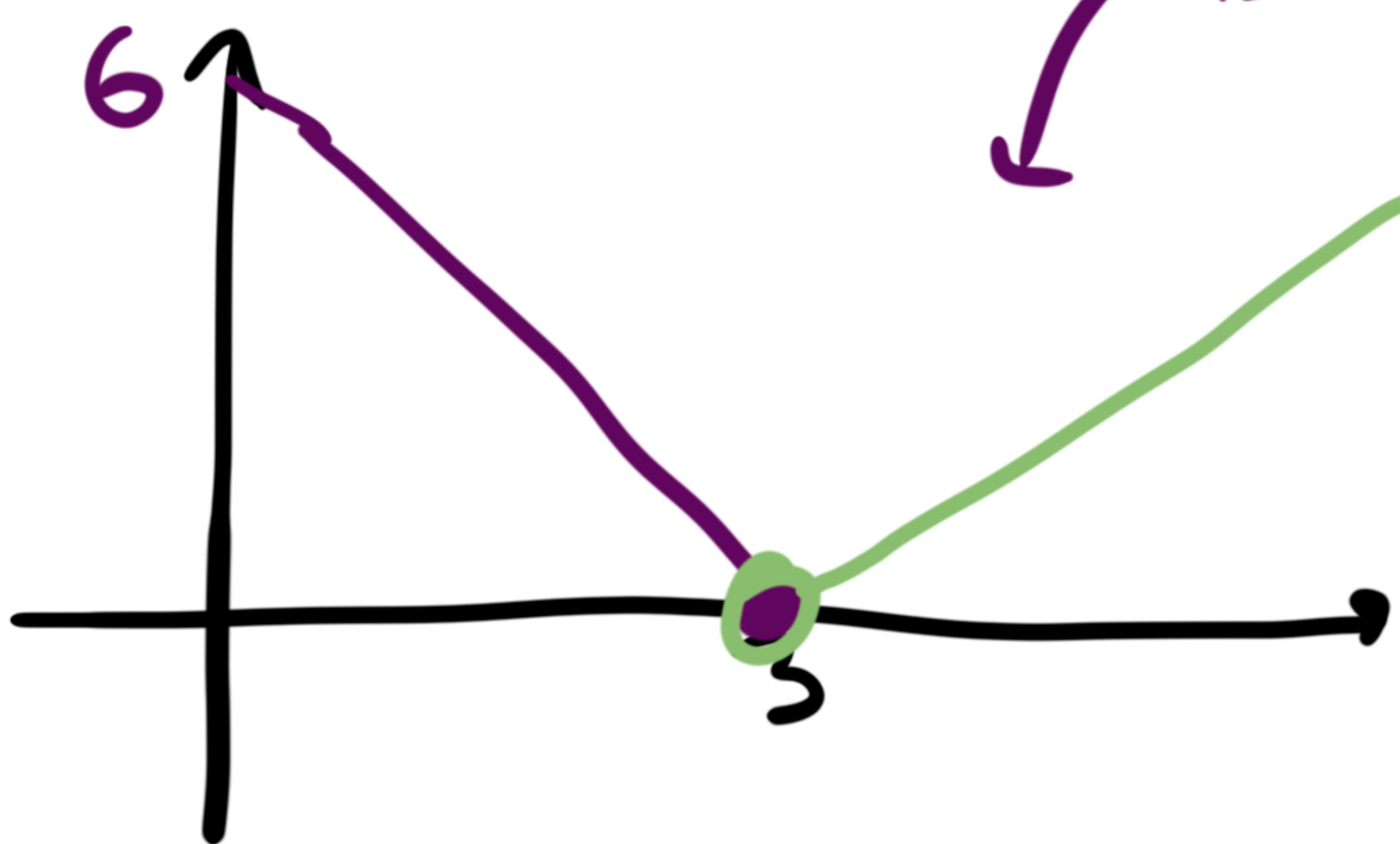
$= -(a-3) + 3-a = -a+3+3-a = \underline{-2a+6}$

$a > 3$ $f(a) = |a-3| + |3-a|$ $\begin{matrix} a > 3 & | & -1 \\ -a < -3 \\ 3-a < 0 \end{matrix}$ $\downarrow$ rectas

$= a-3 - (3-a) = a-3-3+a = \underline{2a-6}$

b) grafique.

$f(3) = 0$



Recta: $f(x) = mx + n$

$f(x) = f(x+1) - f(x)$

$= m(x+1) + n - (mx + n)$

$= \cancel{mx} + m + \cancel{n} - \cancel{mx} - \cancel{n}$
 $= m.$

c) En vista del gráfico,

$\Rightarrow f(x+1) = f(x) + m$
 (se puede)

f crece en $[3, \infty[$ $\leftarrow$ (se induce)

f decrece en $]-\infty, 3]$

$x_1 < x_2$
 $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

d) $I_m(f) =$ (los valores que f alcanza)

$$= [0, \infty[\rightarrow \min(I_m(f)) = 0$$

$$f'(3) = 0.$$

$$e) f(x) = 10 \Leftrightarrow |x-3| + |3-x| = 10$$

Prop: $|y-x| = |x-y|$

$$\Leftrightarrow |x-3| + |x-3| = 10 \Leftrightarrow 2|x-3| = 10$$

$$\Leftrightarrow |x-3| = 5 \quad / \text{distancia 5 de 3}$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -2$$

f) x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) ^{dato.} Demuestre

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$$

^{promedio}
_{no hay $|x|$}

Dem:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow |x_1-3| + |3-x_1| = |x_2-3| + |3-x_2|$$

$$\Leftrightarrow 2|x_1-3| = 2|x_2-3| \Leftrightarrow |x_1-3| = |x_2-3|$$

$$1) x_1-3 = x_2-3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{no pasa} \quad \hookrightarrow |A| = |B|$$

$$2) x_1-3 = -(x_2-3) \Rightarrow x_1-3 = -x_2+3 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 3$$

P2 | $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = -3x^2 - 12x$

a) h, k para que $g(x) = -3(x-h)^2 + k$
queremos

$$-3x^2 - 12x = -3(x-h)^2 + k \quad (\text{igualdad de polinomios})$$
$$\Rightarrow -3x^2 - 12x = -3(x^2 - 2xh + h^2) + k$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x = -3x^2 + 6xh - 3h^2 + k$$

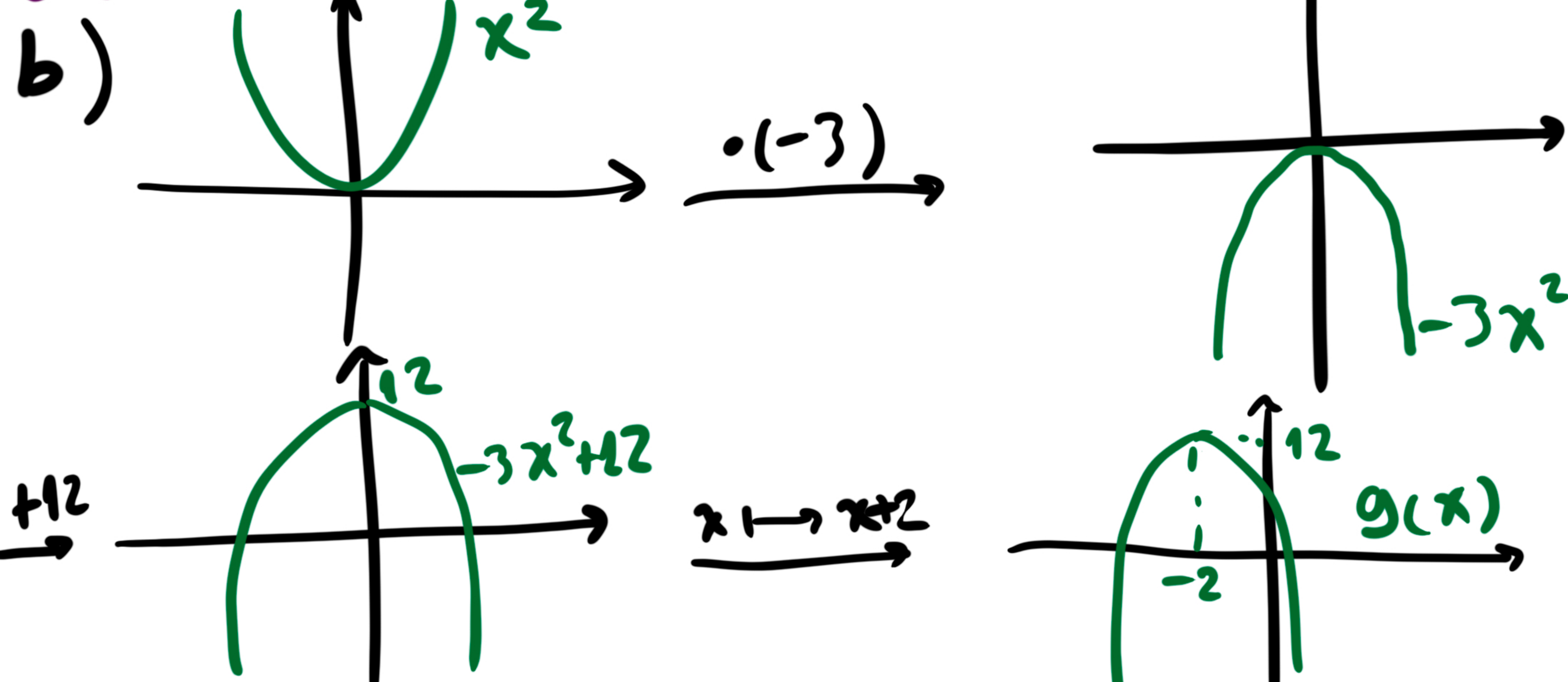
$$\Leftrightarrow -3x^2 - 12x = -3x^2 + 6hx - 3h^2 + k$$

$$1) -3 = -3$$

$$2) -12 = 6h \Rightarrow h = -2$$

$$3) 0 = -3h^2 + k \Leftrightarrow k = 3h^2 = 3 \cdot 4 = \underline{12}$$

$$\therefore g(x) = -3(x+2)^2 + 12$$



c) Por el grafico,

g crece en $] -\infty, -2]$

g decrece en $[-2, \infty[$

d) $I_m(g) =] -\infty, 12]$

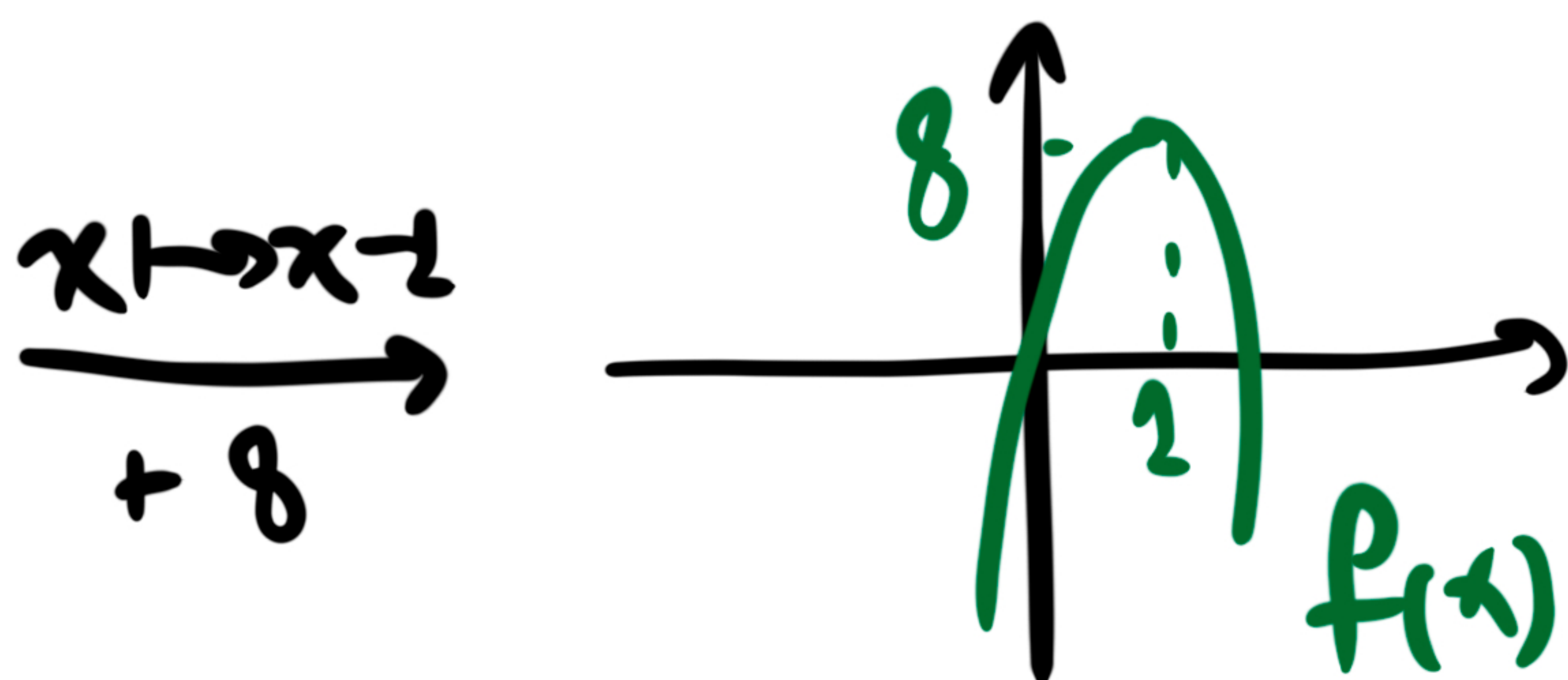
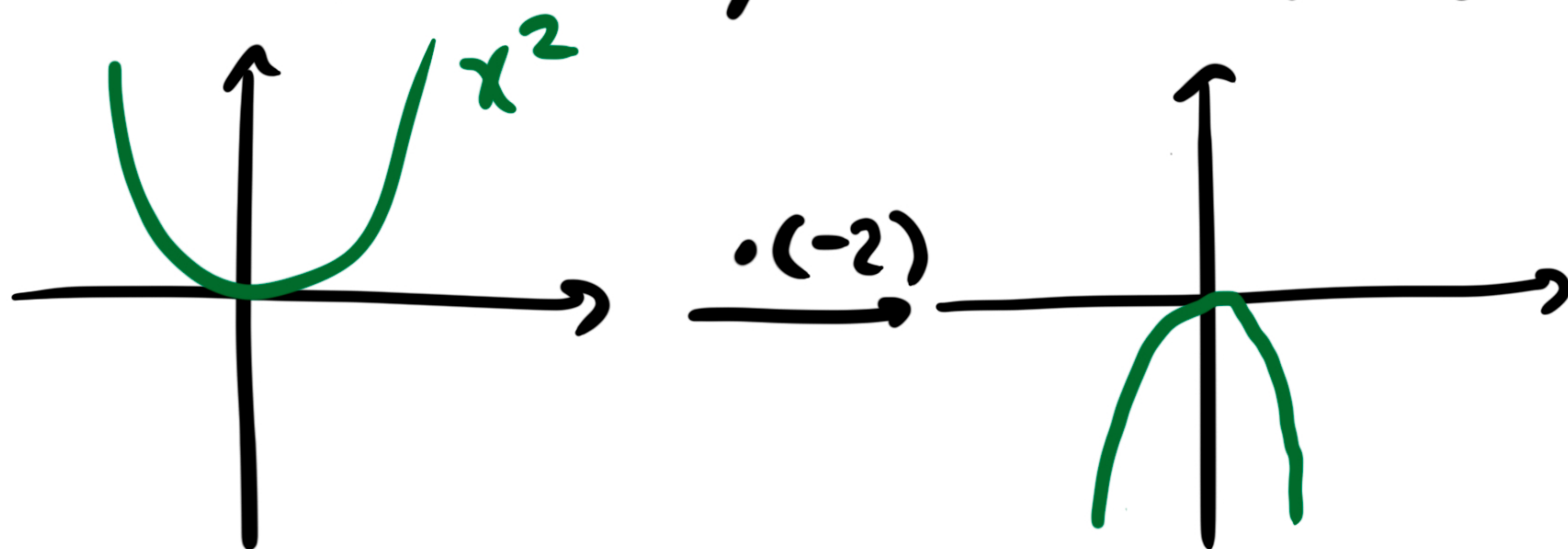
$\min(I_m(g)) \nexists \mid \max(I_m(g)) = 12$

y ocurre $f(-2) = -3(-2+2)^2 + 12 = 12$

P3 $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ (todo es par)

$$= -2(x^2 - 2x - 3) = -2(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 4)$$

$$= -2((x-1)^2 - 4) = -2(x-1)^2 + 8$$



$$b) h(x) = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x + 6 + 10}{x - 4}$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x + 16}{x - 4}$$

$$= \frac{-2(x+2)(\cancel{x-4})}{\cancel{x-4}}$$

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{4\}$$

Grafico:

$$\text{Im}(h) = \mathbb{R} - \{-12\}$$

$$\text{Cod}(h) = \mathbb{R}.$$

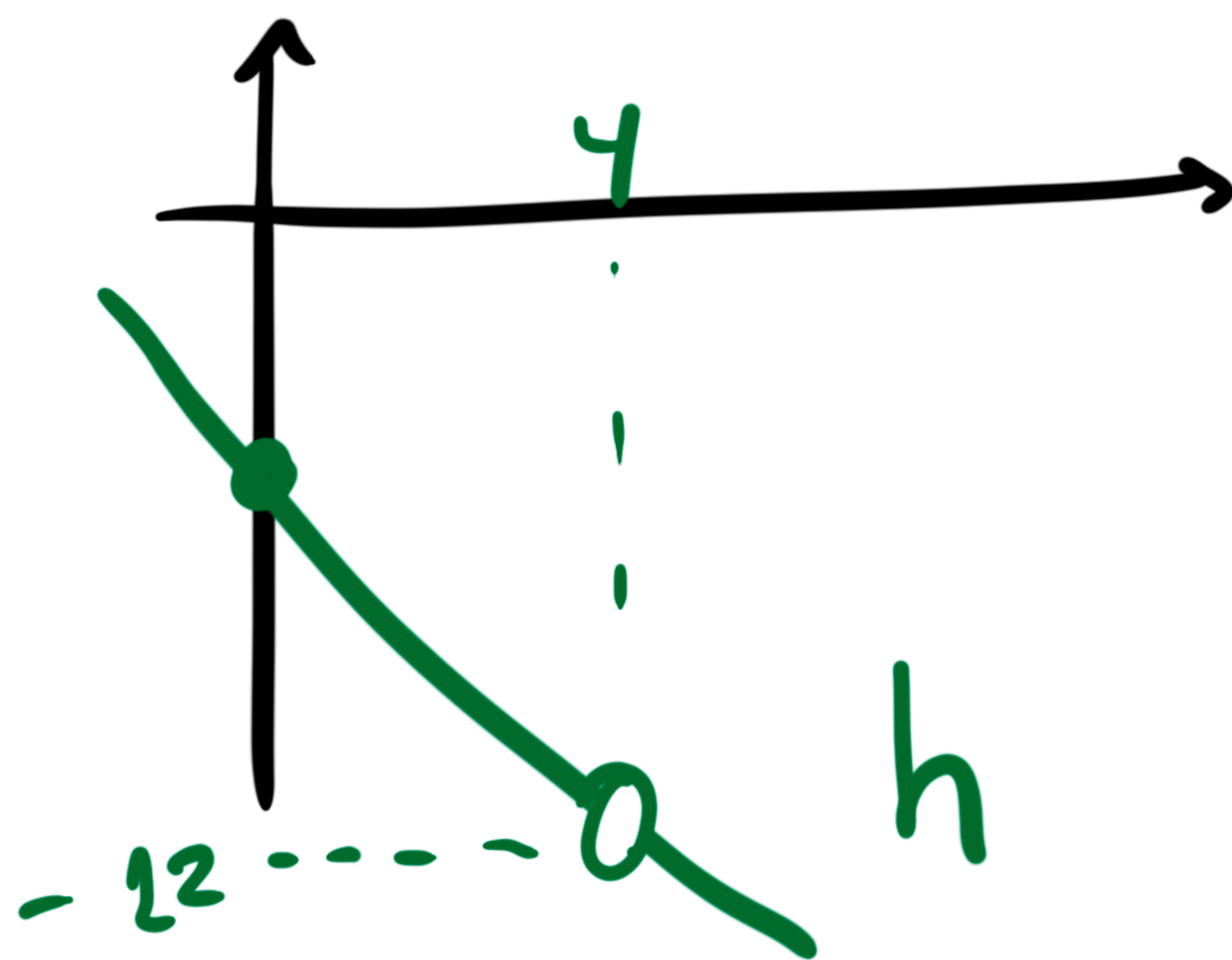
$$\boxed{x \neq 4}$$

va a
per
importante

$$f(4) = -2 \cdot 16 + 16 + 6 \\ = -16 + 6 = -10$$

$$= \frac{-2(x^2 - 2x - 8)}{x - 4}$$

$$= \underline{-2x - 4}$$



P4 | P: Producción promedio

N: Árboles plantados

- $P(60) = 400$

- $N \mapsto N+1 \Rightarrow P \mapsto P-4$

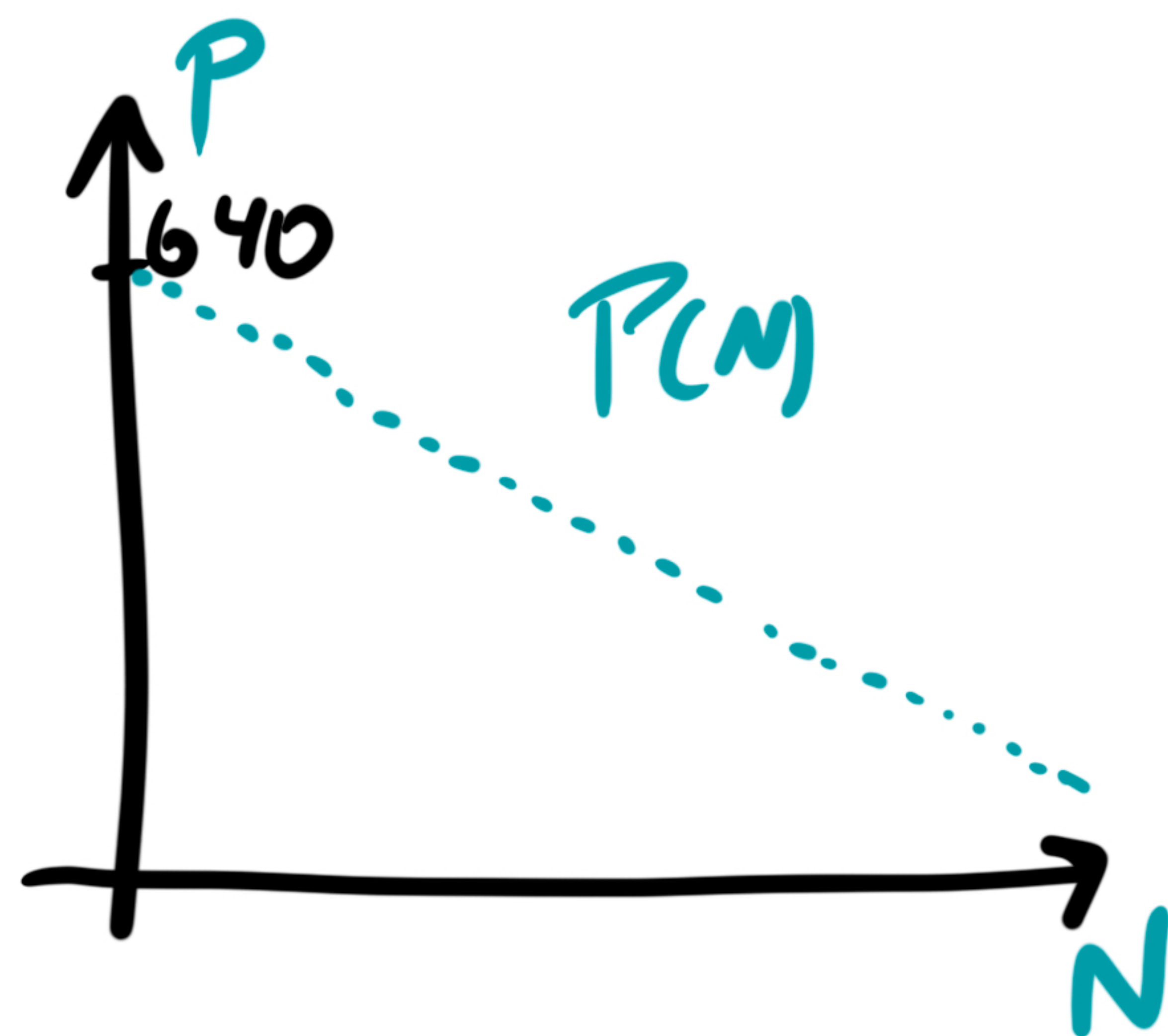
modelo afín de
pendiente $m = -4$

a) Ec de la recta:

$$P = 400 - 4(N - 60)$$

$$\Leftrightarrow P(N) = -4N + 640$$

b) $P(76) = -4 \cdot 76 + 640$
 $= 336$



$$\frac{336}{2} = 168. \text{ Busco } N \text{ tal que } P(N) = 168$$

$$\Leftrightarrow -4N + 640 = 168 \Leftrightarrow 4N = 472$$

$$\Leftrightarrow \underline{N = 118} \quad | \quad (118 - 76 = 42)$$

Se plantaron 42 árboles.

c) Producción total.

$$T(N) = N \cdot P(N) = N(-4N + 640)$$

$$\Leftrightarrow T(N) = -4N^2 + 640N$$

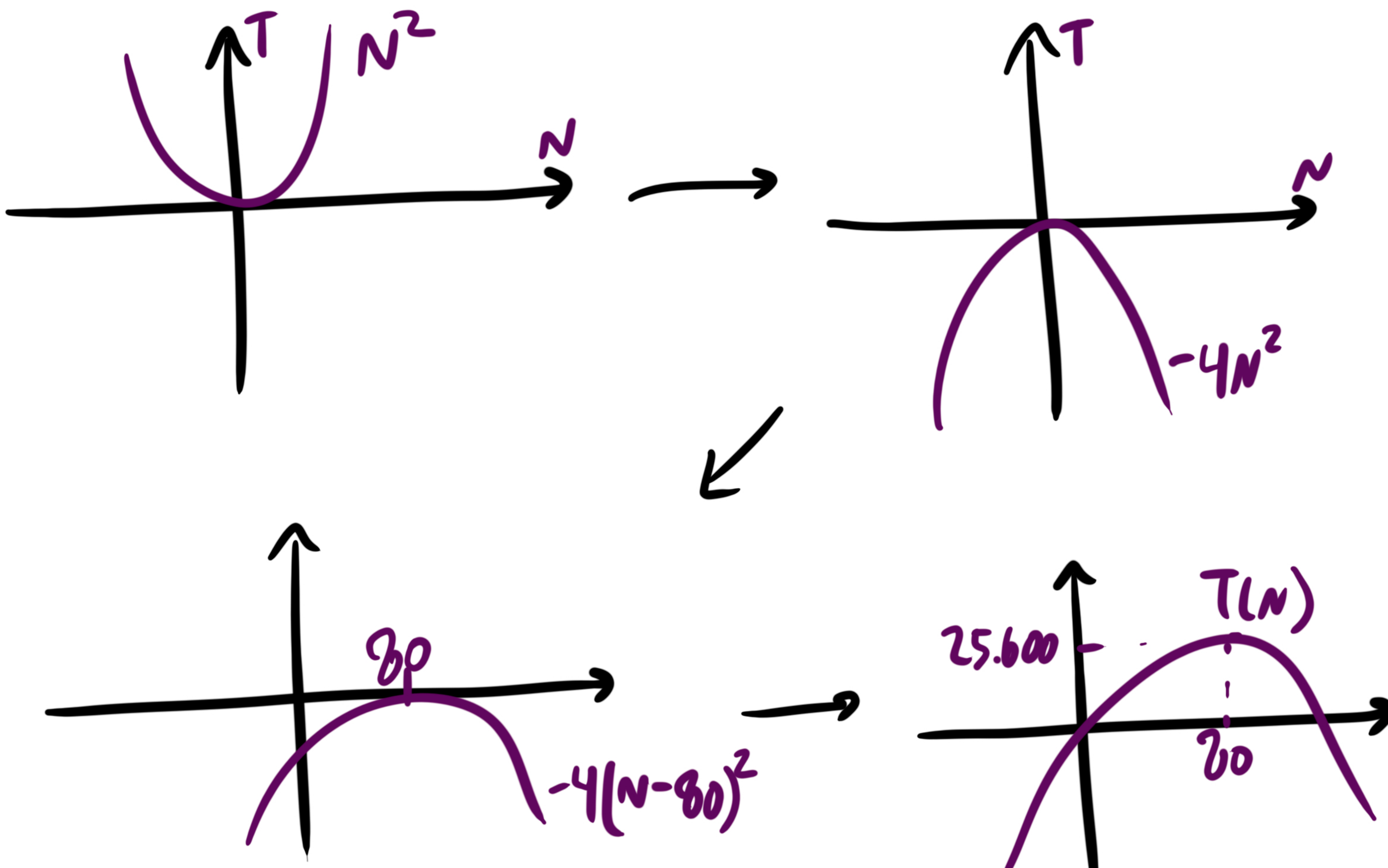
Forma canónica:

$$T(N) = a(N-h)^2 + k \text{ donde } a = -4$$

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-640}{-8} = 80 \text{ y } k = T(h) = T\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$= T(80) = 25.600$$

$$\Rightarrow T(N) = -4(N-80)^2 + 25.600$$



d) Buscamos N para que $T(N) = 22.000$

$$\Leftrightarrow -4(N-80)^2 + 25.600 = 22.000$$

$$\Leftrightarrow -4(N-80)^2 + 3600 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(N-80)^2 = 3600$$

$$\Leftrightarrow (N-80)^2 = 900 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |N-80| = \sqrt{900} = 30$$

$$\Leftrightarrow N-80 = \pm 30 \Leftrightarrow \boxed{N = 80 \pm 30}$$

$$N_1 = 110, N_2 = 50$$

∴ Se pueden plantar 50 o 110 para cumplir lo deseado.

e) En vista del gráfico, la mayor producción se alcanza con $N = 80$ y corresponde a 25.600.

$$p) N_1 \neq N_2$$

$$\text{Suponemos } T(N_1) = T(N_2)$$

$$\Leftrightarrow -4(N_1 - 80)^2 + 25.600 = -4(N_2 - 80)^2 + 25.600$$

$$\Leftrightarrow (N_1 - 80)^2 = (N_2 - 80)^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |N_1 - 80| = |N_2 - 80|$$

Dos casos:

$$\textcircled{1} N_1 - 80 = N_2 - 80 \Leftrightarrow N_1 = N_2 \quad \text{Porque } N_1 \neq N_2 \quad \times$$

$$\textcircled{2} N_1 - 80 = -(N_2 - 80) \Leftrightarrow N_1 - 80 = -N_2 + 80$$

$$\Leftrightarrow N_1 + N_2 = 160 \Leftrightarrow \frac{N_1 + N_2}{2} = 80 \quad \square$$