Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
Primer semestre de 2020

Taller de ayudantía 8
Funciones
20/07/2020

En este taller trabajaremos el concepto de función. En particular, aprenderemos a calcular la imagen de un elemento de su dominio, a determinar el conjunto imagen, y a analizar si los valores de la función están acotados, y alcanzan un máximo y/o mínimo. También aprenderemos a calcular la preimagen de un elemento de su imagen. Además, a partir del gráfico de funciones sencillas, esbozaremos el gráfico de otras funciones mas elaboradas obteniendo así información más completa de la función. Estableceremos los intervalos donde la función es creciente y aquellos en donde es decreciente. Por último, resolveremos problemas en situaciones contextualizadas, mediante el modelamiento de funciones afines y cuadráticas.

Objetivos:

- Calcular la imagen $f(a)$ de un elemento a del dominio de f, y calcular el conjunto preimagen de un elemento c del conjunto imagen de f, es decir, $\{x \in Dom(f) : f(x) = c\}$.
- Determinar y analizar el conjunto imagen de una función. Indicar si éste es acotado, tiene máximo o mínimo, etc. Si el conjunto imagen tiene un valor máximo o mínimo, determinar la preimagen de estos valores.
- Esbozar el gráfico de una funcion afín, valor absoluto, y cuadrática.
- A partir del gráfico de una función f, determinar el dominio, codominio, conjunto imagen y gráfico de la función $g(x) = Af(x-h) + B$.
- A partir del gráfico de una función determinar los intervalos donde ésta es creciente y los intervalos donde es decreciente.
- Resolver problemas modelados mediante funciones afines o cuadráticas, infiriendo información de estos modelos.

Ejercicios Propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $f(x) = |x-3| + |3-x|$.

   a) Determine $f(a)$ para $a \leq 3$ y $f(a)$ para $a > 3$.

   b) Grafique f.

   c) Indique los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde es decreciente.

   d) Determine el conjunto imagen de f. ¿Posee este conjunto un valor mínimo? ¿Y un valor máximo? En caso afirmativo indique su valor, e indique algún valor de x donde éste se alcanza.

e) Determine los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 10$.

f) Sean x_1 y x_2 números reales tales que $x_1 \neq x_2$. Demuestre que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 3$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -3x^2 - 12x$.

   a) Determine los valores de h y k para los cuales $g(x) = -3(x - h)^2 + k$.

   b) Obtenga el gráfico de g a partir del gráfico de f.

   c) Determine los intervalos donde g es creciente y los intervalos donde es decreciente.

   d) Determine el conjunto imagen de g. ¿Posee este conjunto un valor mínimo? ¿Y un valor máximo? En caso afirmativo indique su valor, e indique algún valor de x donde éste se alcanza.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x - 4$.

   a) Grafique f.

   b) Determine dominio, codominio, regla de correspondencia y gráfico de la función h dada por la ecuación $h(x) = \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.

4. Un cultivador de frutas cítricas ha estimado que si planta 60 naranjos en su terreno, cada árbol tendrá una producción promedio de 400 naranjas. Pero también sabe que por cada árbol adicional que plante en la misma superficie, la producción promedio de un árbol disminuirá en 4 naranjas. Se requiere:

   a) Modelar la producción promedio P de cada árbol en función de la cantidad N de árboles plantados. Grafique $P(N)$.

   b) Si se tenían plantados 76 naranjos y al plantar árboles adicionales la producción promedio de cada árbol se redujo a la mitad, ¿cuántos árboles adicionales se plantaron?

   c) Modelar la producción total T de naranjas en función de la cantidad N de árboles plantados en el terreno. Determine la forma canónica de $T(N)$ y grafique $T(N)$.

   d) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el terreno para que la producción total sean 22.000 naranjas?

   e) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el terreno para que la producción total sea la más grande posible?

   f) Pruebe que si $N_1 \neq N_2$ y $T(N_1) = T(N_2)$, entonces $\dfrac{N_1 + N_2}{2} = 80$.

El propósito del cálculo no son los números sino el entendimiento.