

P₁ | Verdadero o falso?

$$a) 3 < \frac{1}{x} \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

verdadero!

Demostración: Notamos que si $3 < \frac{1}{x}$,
como $0 < 3$, tenemos $0 < \frac{1}{x}$.

Probaremos que $x > 0$

En efecto, por axioma de tricotomía,
 $x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0$. De modo
que basta probar que no puede ser
negativo ni 0.

De la existencia de $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ✓
Supongamos por contradicción $x < 0$,
luego, como $x \cdot \frac{1}{x} = 1 > 0$, $\frac{1}{x} < 0$,
(Pero sabíamos que $\frac{1}{x} > 0$!) ✗
 $\Rightarrow x$ debe ser positivo.

¿Por qué hice esto? Ahora sé que como $x > 0$, multiplicar por él no altera el orden de una desigualdad.

$$3 < \frac{1}{x} \quad / \cdot x (> 0)$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x < 1 \quad / \cdot \frac{1}{3} (> 0)$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{3} \quad \square$$

b) si $0 < p < q < 1$, entonces $0 < pq < p$
Verdadero!

Demostración: $\begin{cases} 1) 0 < pq \\ 2) pq < p \end{cases}$

$$1) 0 < p \quad / \cdot q (> 0)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot q < p \cdot q \Rightarrow 0 < pq.$$

$$2) q < 1 \quad / \cdot p (> 0) \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow pq < p. \quad \leadsto 0 < pq < p \quad \square$$

c) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a-b| \leq |a|-|b|$

falso! tomemos $a=0$ y $b=1$,
 $|a-b| = |0-1| = |-1| = 1$

$$|a|-|b| = |0|-|1| = 0-1 = -1$$

y no se cumple $1 \leq -1$ //

d) $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$

falso! $x=0$, $y=-1$

$$x^2=0, y^2=1 \Rightarrow x^2 < y^2 \checkmark$$

Pero $x > y$ //

P2 Demuestre que $\nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0$

Dem: Note que:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}^1 + \frac{3}{4}$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ . como } \frac{3}{4} > 0, \text{ si}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0, \text{ se tendría } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < 0 *$$

P3 | Demuestre:

a) Si $x, y > 0$, entonces $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dem: Sabemos que

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad / \text{expando}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad / -2xy = 2xy - 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0 \quad / +4xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \quad / \sqrt{\quad} \rightarrow \text{se conserva el orden ya que todo es positivo}$$

$$\Leftrightarrow |x+y| \geq 2\sqrt{xy} \quad / \begin{array}{l} x+y \geq 0 \\ \Rightarrow |x+y| = x+y \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{||}$$



De lo anterior vemos que la igualdad se cumple cuando $(x-y)^2 = 0$

$$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y.$$

b) Si $h > 0$, entonces $h + 4h^{-1} - 8 \geq -4$

Borrador: $h + \frac{4}{h} - 8 \geq -4 \quad | + 8$

$$\Leftrightarrow h + \frac{4}{h} \geq 4 \quad | \text{ Sumo fracciones}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2 + 4}{h} \geq 4 \quad | \cdot h (> 0)$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 4 \geq 4h \quad | - 4h$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 4h + 4 \geq 0 \quad | \begin{matrix} h^2 - 4h + 4 \\ = (h-2)^2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (h-2)^2 \geq 0 \quad \leadsto \text{¡verdad ero!}$$

Dem: Sabemos que

$$(h-2)^2 \geq 0 \Rightarrow h^2 - 4h + 4 \geq 0 \Rightarrow h^2 + 4 \geq 4h$$

$$\Rightarrow \overset{\cdot \frac{1}{h} (> 0)}{\frac{h^2 + 4}{h} \geq 4} \Rightarrow \frac{h^2}{h} + \frac{4}{h} \geq 4 \Rightarrow h + 4h^{-1} \geq 4$$

$$\Rightarrow h + 4h^{-1} - 8 \geq -4 \quad \blacksquare$$

Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Borrador: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad | \quad ()^2$
 $\Rightarrow a+b \leq a+2\sqrt{ab}+b \quad | \quad \begin{matrix} \text{(todo)} \\ \oplus \\ -(a+b) \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{ab} \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq 0 \quad | \text{verdadero!}$$

Dem: como $a, b > 0$, entonces $\sqrt{ab}$ existe y es positiva:

$$\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow a+2\sqrt{ab}+b \geq a+b$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a+b \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

Se conserva el orden porque ambos lados son positivos!

P4/ Iván: \$3.000 fijo + \$22.000 por hora

Eugenio: \$5.000 fijo + \$10.000 por hora

→ "Iván visitó a dos"

Sea $I(t)$ la cantidad que Iván gana para t horas. Luego,

$$I(t) = 2 \cdot 3.000 + 22.000 t \\ = 6.000 + 22.000 t$$

→ "Eugenio visitó a tres"

Sea $E(t)$ la cantidad que Eugenio gana para t horas. Luego,

$$E(t) = 3 \cdot 5.000 + 10.000 t = 15.000 + 10.000 t$$

Sabiendo que trabajan lo mismo, se nos pregunta si existe $0 \leq t \leq 11$ tal que $I(t) \geq 2E(t)$

$$\Leftrightarrow 6.000 + 22.000 t \geq 2(15.000 + 10.000 t)$$

$$\Leftrightarrow 3.000 + 11.000 t \geq 15.000 + 10.000 t$$

$$\Leftrightarrow 3 + 11t \geq 15 + 10t \quad | -10t - 3$$

$$\Leftrightarrow t \geq 12$$

∴ no es posible trabajando a lo más 11 horas.