Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 1
1*er*. semestre de 2020

Taller de ayudantía 2
Axiomática de números reales

27/04/2020

En este taller, trabajaremos la axiomática en que se rigen los números reales. Recordaremos las restricción que debe tener una expresión algebraica para que esté bien definido. Trabajaremos con demostraciones y contraejemplos de proposiciones, según sea el caso. Por último, estudiaremos los axiomas de cuerpo bajo otra operación definida en $\mathbb{R}$ (distinta de las usuales).

Objetivos:

1. Identificar condiciones para que una expresión algebraica esté bien definida.
2. Trabajar con los axiomas de los números reales para demostrar, y con contraejemplos para refutar, afirmaciones.
3. Aplicar los axiomas de cuerpo.

Ejercicios Propuestos

1. Simplifique las siguientes expresiones indicando sus restricciones:

   a) $\dfrac{1}{1-a^2}\cdot\dfrac{a^3-1}{a^2-a+1}\cdot\dfrac{a^3+1}{a^2+a+1}+\dfrac{(a^2+11a+10)(a^3-3a^2+3a-1)(a^2+3a+2)}{(a^2-1)^2(a^2+9a-10)(a+2)}.$

   b) $\dfrac{2-c}{c^2+c-6}+\dfrac{5}{9-c^2}-\dfrac{4-c}{c^2-7c+12}.$

2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justifique demostrando o con un contraejemplo, respectivamente.

   a) Sean $b, d \neq 0$. Luego, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.

   b) Para todo número real b se verifica que $\sqrt{b^2}=b$.

   c) Si x, y son números reales positivos, entonces $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$.

3. a) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

   b) Demuestre que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $ab^{-1}+cd^{-1}=(ad+bc)(bd)^{-1}$.

4. En el conjunto de los números reales distintos de cero podemos definir la siguiente operación:

$$a \oplus b := \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

donde el símbolo $+$ es la suma usual de $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que la operación $\oplus$ es conmutativa.

b) Demuestre que la operación $\oplus$ no es asociativa.

Educar la mente sin educar el corazón no es educación en absoluto.