Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2019

Taller de ayudantía 12
Integrales Impropias

04/12/2019

En este taller trabajarás integrales bajo un concepto más amplio del visto a la fecha, en el cual la integral la hemos desarrollado con funciones continuas en intervalos de la forma $[a, b]$. Este nuevo enfoque definirá integrales de funciones continuas en intervalos no acotados, es decir, de la forma: $]-\infty, b]$ o $[a, \infty[$ o $]-\infty, +\infty[$, las cuales se denominan integrales impropias de primera especie, las cuales se trabajan mediante límites. De esta manera, si el límite existe diremos que la integral impropia converge, en caso contrario diremos que diverge.

Objetivos:

- Determinarás si una integral impropia de primera especie converge o diverge, mediante definición.
- Representarás el área de una región R y el volumen de un sólido de revolución, utilizando integrales impropias.

Ejercicios Propuestos

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias de primera especie:

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,\operatorname{sen}(x)\, dx$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4}\, dx$

   d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)}\, dx$

2. Se define la función $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$. Demuestre que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

3. Considera la región $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x} \right\}$.

a) Demuestra que la región R tiene área infinita.

b) Demuestra que al rotar la región R en torno al eje X, se obtiene un sólido que tiene volumen finito.

Problemas Opcionales

- Determine si el área bajo la curva $y = f(x)$ donde $f(x) = e^{-|x|}$ y sobre el eje OX es finita o infinita.
- Determine si la siguiente integral converge o diverge: $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.
- Sea R la región bajo la curva $y = f(x)$ donde $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ y sobre el eje OX. Determine el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región R en torno al eje OX, para $x \geq 1$.

La causa es el trabajo, el triunfo la consecuencia.