Fracciones Parciales

Sebastián Elías Puelma Moya

26 de junio de 2006

Presentación

El método de fracciones parciales puede describirse (en pocas palabras) como un truco aritmético para escribir de otra forma una división de polinomios. Esta nueva forma es "más cómoda" en algunos contextos, como cálculo de integrales, comportamiento de funciones en torno a los ceros del denominador, en ocasiones nos permite usar la propiedad telescópica de la sumatoria, entre otros.

Veamos un ejemplo ilustrativo, a la izquierda el cuociente de polinomios y a la derecha la representación en fracciones parciales. Si a un alumno de cálculo se le pide hallar la integral indefinida de esto, no dudará en ir al lado derecho:

$$\frac{x^8+6x^7+18x^6+39x^5+67x^4+86x^3+75x^2+39x+11}{(x+1)^3(x+2)(x^2+x+1)} = x^2+3+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{3}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Nunca está de más (y en este caso es fundamental) desarrollar un ejemplo, más sencillo que el anterior, que nos permita sacar conclusiones generales. La idea es escribir coherentemente lo que uno desea conseguir, definiendo todo lo que haga falta y explicando los pasos, uno a uno. Nuestro ejemplo es el siguiente:

$$\frac{x^5+3x^4+6x^3+8x^2+5x+3}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} \tag{1}$$

Algunos preliminares conceptuales

Consideremos polinomios en una variable, que son denotados con una letra minúscula, seguido de la variable indeterminada entre paréntesis: $f(x), p(x), q(x), r(x), \ldots$[1]. Se supone entendido qué es el grado de un polinomio no nulo. Si un polinomio tiene grado n, entonces llamaremos coeficiente líder a aquel que pondera a x^n. Suponemos conocidas las operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación)

Dados dos polinomios: $f(x), p(x)$, es posible dividirlos. Esto significa que existen polinomios $q(x), r(x)$ que cumplen las siguientes dos propiedades:

- $f(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$, o bien el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$

Los polinomios $q(x), r(x)$ están bien determinados a partir de $f(x), p(x)$, o sea, son únicos. La justificación de esto (existencia y unicidad) no es nuestro objetivo por ahora

Es útil comparar en un comienzo, esto con el algoritmo de la división de enteros (al dividir dos enteros, con divisor entero positivo, aparece un cuociente y un resto. El resto es menor que el divisor). Los nombres se mantienen en este contexto. Por ejemplo, $r(x)$ se sigue llamando resto. Si $r(x) = 0$, decimos que $p(x)$ es un divisor de $f(x)$

[1] La variable y los coeficientes están en $\mathbb{C}$, a menos que se diga explícitamente lo contrario. La variable o indeterminada siempre se denotará x. Cuando desarrollemos el método de fracciones parciales, los polinomios se indicarán con letras mayúsculas

Otro asunto interesante es el teorema del resto: Cuando el polinomio $f(x)$ se divide por $x-a$, el resto es $f(a)$. Basta con tomar el algoritmo de la división ($p(x) = x - a$) y reemplazar $x = a$. Como el grado de $x-a$ es 1, no queda otra opción que $r(x)$ sea constante (tal vez nulo). Luego $f(a) = r(a) = r(x)$. De aquí se deduce el teorema del factor: $x - a$ es un divisor del polinomio $f(x)$, si y sólo si $f(a) = 0$. En caso afirmativo se dice que a es una raíz o un cero del polinomio

También es válido el Teorema Fundamental del Álgebra, que dice lo siguiente: todo polinomio no constante posee una raíz compleja. Esto nos permite sacar un factor lineal: si el polinomio $p(x)$ tiene una raíz $a \in \mathbb{C}$, entonces podemos hallar un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - r) \cdot q(x)$, y el grado del polinomio $q(x)$ es una unidad menor que el grado de $p(x)$. Si continuamos con el procedimiento tantas veces como sea posible, llegamos a la siguiente representación del polinomio $p(x)$, con grado n y coeficiente líder A:

$$p(x) = A(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) \tag{2}$$

Por otra parte, si $z \in \mathbb{C}$ es escrito como $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), y resulta ser una raíz de $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces su conjugado: $\overline{z} = a - bi$ también es raíz de $p(x)$. Queda de ejercicio propuesto. Pasando a la forma (2) y agrupando los pares de factores $(x - z), (x - \overline{z})$ (si los hubiera con $Im(z) \neq 0$), vemos que cualquier polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ puede escribirse como producto de polinomios, todos ellos con grado menor o igual que 2 (y si el grado es igual a 2, este polinomio no puede ser reducido, o sea no tiene raíces reales, su discriminante es negativo). Tenemos otra forma:

$$p(x) = A(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_m)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)...(x^2 + b_kx + c_k) \tag{3}$$

donde las raíces reales son $a_1, ..., a_m$, y además $b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $b_j^2 - 4c_j < 0$.

Uno a uno los pasos del método de fracciones parciales

Esta técnica se trabaja para el cuociente de polinomios, con una variable. Por lo tanto, vamos a considerar $F(x), P(x)$ polinomios de este tipo, con coeficientes en $\mathbb{R}$. Además vamos a exigir que $P(x)$ no sea constante, para evitar casos evidentes. La expresión con la que trabajaremos, es:

$$\frac{F(x)}{P(x)}$$

A continuación viene una lista con los pasos fundamentales del método de fracciones parciales

1. Dividir polinomios

Algo que puede suceder al comienzo, es que $F(x)$ tenga grado mayor o igual que $P(x)$, y lo que debemos hacer en este caso, es dividir. Aparece un cuociente $Q(x)$ y un resto $R(x)$, con las siguientes propiedades:

- $F(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$
- $R(x) = 0$, o bien el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $P(x)$

Si dividimos la primera igualdad por $P(x)$ vamos a obtener:

$$\frac{F(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

Si fuera $R(x) = 0$, entonces $\frac{F(x)}{P(x)} = Q(x)$ (excepto cuando $P(x) = 0$) es un polinomio y el proceso acaba. Si $R(x) \neq 0$, entonces nos concentramos en $\frac{R(x)}{P(x)}$ para seguir. Veamos lo que pasa con nuestro ejemplo:

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 5x + 3}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = (x + 1) + \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

2. Factorizar el denominador

Esto quiere decir que llevamos $P(x)$ a la forma (2) o bien a la forma (3), dependiendo de nuestros objetivos (normalmente se busca la representación (3), sobre todo si queremos calcular integrales). Pasando a fórmulas se tiene lo siguiente:

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{R(x)}{A(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)...(x^2+b_kx+c_k)}$$

La constante A no debería ser un problema significativo, desde un punto de vista teórico y práctico.

En nuestro ejemplo vamos a tener lo siguiente (el factor cuadrático tiene discriminante negativo):

$$\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Salvo casos excepcionales, factorizar polinomios es sumamente complicado. Requiere práctica y conocimiento de ciertos criterios. Por esta razón, casi siempre en los ejercicios propuestos el denominador ya está factorizado, o bien lo que falta se deduce a partir de técnicas usuales de factorización

3. Obtener las fracciones parciales

Aquí debemos hacer una observación: las representaciones (2) y (3) no han agrupado explícitamente los factores repetidos. En este método es necesario hacerlo para el denominador. Lo que viene a continuación es generar ciertas fracciones de la siguiente manera:

- Cada factor de la forma $(x-a)^m$, con $a \in \mathbb{R}$ genera las fracciones

$$\frac{A_1}{x-a}, ..., \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

  donde $A_1, ..., A_m$ son constantes reales, incógnitas por ahora

- Cada factor de la forma $(x^2+bx+c)^m$, con $b, c \in \mathbb{R}, b^2-4c<0$, genera las fracciones

$$\frac{B_1 \cdot x + C_1}{x^2+bx+c}, ..., \frac{B_m \cdot x + C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

  donde $B_1, C_1, ..., B_m, C_m$ son constantes reales, incógnitas por ahora

- Todas estas fracciones generadas, se suman para obtener $\dfrac{R(x)}{P(x)}$

Veamos lo que ocurre con nuestro ejemplo. Se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1 \cdot x + C_1}{x^2+1}$$

4. Encontrar el valor numérico de las constantes A_j, B_j, C_j

Cuando uno llega a la igualdad enunciada en la parte anterior, pueden igualarse los denominadores, y en el numerador se llega a una igualdad de polinomios (otra forma de verlo, es multiplicar ambos lados de la igualdad por $P(x)$, que ya estaba factorizado). Esta es información suficiente para encontrar todos los coeficientes. Vamos a indicar dos métodos para conseguirlo: igualdad por coeficiente, y evaluación, con la ventaja que ambos pueden ser combinados, como sea más cómodo para cada caso.

Antes de eso, veamos lo que sucede con nuestro ejemplo (multiplicamos por $(x+1)^2(x^2+1)$):

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1 \cdot x + C_1}{x^2+1} \\
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (B_1 \cdot x + C_1)(x+1)^2
\end{aligned}$$

4.1. Igualdad por coeficiente

Dos polinomios son iguales, cuando lo son coeficiente por coeficiente. Usamos este principio para establecer un sistema de ecuaciones que nos dará el valor de las constantes A_j, B_j, C_j. Veamos con nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(B_1\cdot x+C_1)(x+1)^2\\
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1(x^3+x^2+x+1)+A_2(x^2+1)+(B_1\cdot x+C_1)(x^2+2x+1)\\
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1\cdot x^3+A_1\cdot x^2+A_1\cdot x+A_1+A_2\cdot x^2+A_2+B_1\cdot x^3+2B_1\cdot x^2+B_1\cdot x+\\
&\quad +C_1\cdot x^2+2C_1\cdot x+C_1\\
2x^3+4x^2+2x+2 &= (A_1+B_1)x^3+(A_1+A_2+2B_1+C_1)x^2+(A_1+B_1+2C_1)x+(A_1+A_2+C_1)
\end{aligned}$$

De aquí pasamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & & & + & B_1 & & & = & 2\\
A_1 & + & A_2 & + & 2B_1 & + & C_1 & = & 4\\
A_1 & & & + & B_1 & + & 2C_1 & = & 2\\
A_1 & + & A_2 & & & + & C_1 & = & 2
\end{array}$$

Restando la primera ecuación de la primera, se obtiene que $C_1=0$. Restando la cuarta ecuación de la segunda se obtiene $B_1=1$. Reemplazando esto en las ecuaciones, obtenemos que $A_1=1$ y que $A_1+A_2=2$, de donde $A_2=1$. A fin de cuentas, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}\\
\frac{x^5+3x^4+6x^3+8x^2+5x+3}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= (x+1)+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Formalmente, esto termina de resolver el problema (salvo por pequeños detalles técnicos). Pero es muy habitual que de este método aparezca un sistema de ecuaciones bien complicado. En este ejemplo tuvimos suerte que no fuera así, y se pudo salir del problema en pocos pasos.

4.2. Evaluación

Este método es especialmente corto cuando el denominador (ya factorizado) tiene muchos factores (lineales o cuadráticos irreducibles) con exponente 1. El método es evaluar los polinomios, o sea dar valores a x. Lo astuto es evaluar en los ceros (reales o complejos) del denominador. Veamos qué sucede en nuestro ejemplo:

$$2x^3+4x^2+2x+2 = A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(B_1\cdot x+C_1)(x+1)^2$$

Si reemplazamos $x=-1$ llegamos a lo siguiente: $2=2A_2$, de donde $A_2=1$. A diferencia del método anterior, llegamos de inmediato al valor de una constante, cosa que antes podía tardar mucho tiempo. Poniendo $x=i$ tenemos lo siguiente: $-2=-2B_1+2C_1i$. Ahora nos acordamos que $B_1, C_1\in\mathbb{R}$, luego $B_1=1, C_1=0$. Aquí con una evaluación obtuvimos dos incógnitas. Al evaluar $x=-i$ (el complejo conjugada) obtenemos la misma información, así que no lo haremos.

Hasta aquí no es forzoso tener todos los coeficientes (en nuestro ejemplo falta obtener A_1). El esquema general para continuar, es el siguiente: reemplazar todas las constantes que hayamos determinado, aislar las incógnitas restantes en el lado derecho, factorizar ambos lados y dividir por los factores comunes. Veamos lo que pasa en nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1(x+1)(x^2+1)+(x^2+1)+x(x+1)^2\\
2x^3+4x^2+2x+2 &= A_1(x+1)(x^2+1)+x^2+1+x^3+2x^2+x\\
x^3+x^2+x+1 &= A_1(x+1)(x^2+1)\\
(x+1)(x^2+1) &= A_1(x+1)(x^2+1)\\
1 &= A_1
\end{aligned}$$

Normalmente se llega a este punto y repetimos el razonamiento inicial (el método de evaluación), pero en el ejemplo apenas quedaba una incógnita y por eso terminamos de inmediato. Si hubieran más constantes por determinar, el proceso se extendería un poco más. Un camino alternativo a este, es reemplazar las constantes conocidas, derivar, evaluar en todas las raíces que sean convenientes, y con frecuencia se obtiene "gratis" el valor de algunas constantes. Con práctica, esto resulta mucho más rápido. En nuestro ejemplo se vería así:

$$\begin{aligned}
2x^3 + 4x^2 + 2x + 2 &= A_1(x+1)(x^2+1) + (x^2+1) + x(x+1)^2 \\
6x^2 + 8x + 2 &= A_1((x^2+1) + 2x(x+1)) + 2x + (x+1)^2 + 2x(x+1) \\
0 &= A_1 \cdot 2 - 2 \\
1 &= A_1
\end{aligned}$$