



Taller de ayudantía 9
Funciones logaritmo y exponencial y aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral
02/10/2019

En este taller, resolveremos situaciones contextualizadas en las ciencias naturales y en el ámbito de la matemática. Para ello aplicaremos las reglas de derivación, la regla de L'Hopital, los criterios de la primera y segunda derivada, el teorema fundamental del cálculo y el teorema del valor medio. Todo lo anterior servirá para analizar y optimizar funciones cuya regla de correspondencia incluye a las funciones logaritmo y exponencial, calcular el área bajo una curva, el promedio de una función en un intervalo cerrado y el punto donde éste se alcanza, como así también determinar la primitiva de una función que satisface un valor inicial.

Objetivos:

- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Calcular primeras y segundas derivadas aplicando las reglas de derivación.
- Realizar análisis gráfico de funciones que incluyen en su regla de correspondencia a las funciones logaritmo y exponencial.
- Optimizar.
- Calcular primitivas e integrales definidas para resolver problemas.
- Calcular el valor promedio de una función en un intervalo cerrado y el punto donde el valor promedio se alcanza.
- Calcular el área bajo una curva.
- Determinar la primitiva de una función que satisface un valor inicial.

Ejercicios Propuestos

1. Halle el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln(2)x \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ sobre el intervalo $[0, a]$. Demuestre que el área nunca es mayor o igual a $\frac{1}{2}$.

(Ayuda: Demuestre que $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$)

2. Si a un estanque se vierte agua con un flujo de $r(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}}$, $0 \leq t \leq 19$ litros de agua por hora.

- ¿ Cuántos litros de agua se habrán vertido al estanque en las 19 horas?
- Determine el flujo promedio en las 19 horas y el instante t_* en que el flujo es igual al flujo promedio.

(Ayuda: Demuestre que $\int (f(x))^s f'(x) dx = \frac{1}{(s+1)} (f(x))^{s+1} + C.$)

3. En las dinámicas de poblaciones de peces explotadas, un modelo que relaciona la población desovante (stock reproductivo) P con el reclutamiento R , está dado por el modelo de Ricker:

$$R(P) = aPe^{-bP}, P \geq 0,$$

donde a y b son constantes positivas.

El reclutamiento corresponde al número de peces vivos tras la fase larvaria que se incorporan a la población de peces pero que aun no son reproductores. Cronológicamente, la población desovante produce cierta cantidad de huevos, que al eclosionar dejan en libertad cierta cantidad de larvas, las cuales van completando su desarrollo hasta llegar al estado juvenil. Al cabo de cierto tiempo se produce el reclutamiento y se tiene una cierta cantidad de peces jóvenes que entran a formar parte de la población y a partir de ese momento comienzan a tener un efecto decisivo en su dinámica. (<http://www.fao.org/3/T0169S/T0169S06.htm>)

Se requiere

- Realice análisis gráfico de $R(P)$
 - Determine el tamaño de la población desovante para el cual el reclutamiento es máximo.
 - Determine el tamaño de la población desovante P para la cual la tasa de reclutamiento, $R'(P)$, es máxima y para la cual es mínima.
4. Según la ley de enfriamiento o calentamiento de Newton, la temperatura de un objeto T después de t minutos de haber sido dejado en un medio ambiente con temperatura constante T_a está dada por la función

$$T(t) = T_a - Me^{kt}$$

- Demuestre que en cualquier instante t la razón de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto. ¿Cuál es el signo de la constante k ?
- Una bebida, cuya temperatura es $3^\circ C$, se saca de un refrigerador y se deja en una sala en donde la temperatura ambiente es constante igual a $30^\circ C$. Si la temperatura de la bebida al cabo de 20 minutos es de $12^\circ C$, determine el tiempo que se debe esperar desde que fue sacada del refrigerador para que su temperatura suba a $15^\circ C$.

Problemas Opcionales

- Considere las funciones $g(x) = (\sqrt{x})^x$, con $x > 0$ y la función $h(x) = x^{\sqrt{x}}$, con $x > 0$. ¿ Para cuáles valores de x es cierto que $\frac{g(x)}{h(x)} \geq 1$?
- Se ha detectado una enfermedad contagiosa propagándose por una ciudad y usted pertenece al equipo encargado de asegurar que se disponga de la infraestructura suficiente para enfrentarla. Se sabe, a partir de la propagación de esta enfermedad en otras ciudades, que la cantidad P de personas que han acudido a los hospitales de la ciudad hasta el tiempo t , medido en semanas, viene dada por la relación:

$$P(t) = \frac{20Ce^{\frac{t}{2}}}{Ce^{\frac{t}{2}} - 1}$$

Donde C es una constante y P viene medida en miles de habitantes.

- a) Determine el valor de la constante C si se sabe que el detectarse la enfermedad la cantidad de gente atendida era de $\frac{20}{21}$ miles de pacientes.
- b) Encuentre la semana durante la cual la tasa de cambio pacientes atendidos será máxima. Esto corresponde al momento de mayor actividad por parte de los hospitales de la ciudad ¿Cuál será dicha tasa de pacientes?
- c) Esboce la función P y estime el tamaño de la población afectada por la enfermedad.

*Yo, doy las gracias a la vida día a día, el futuro viene hacia a mi pues en mi confía.
Mi camino sigue siendo el mismo de siempre.*