

Ayudaría 7
(12/09/2019)

P1) Usando el T.F.C, calcule $F'(t)$, donde $F(t) = \int_{t^2}^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$. CBF
creciente alrededor de $t = -1$?

Sol: Recordemos el 1^{er} TFC:

Teo (P.T.F.C): Si f es una función continua en un intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $a \in I$ entonces la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en (a, b) y además $G' = f$ en (a, b) .

Tenemos que $F(t) = \int_{t^2}^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$. Luego:

1) Sea $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ continua en $\mathbb{R}$ luego en $[t^2, t^3]$ pues sabemos que $\cos(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

2) Sean $g(t) = t^2$, $h(t) = t^3$ derivables en $\mathbb{R}$.

Así, por TFC:

- F es derivable en $\mathbb{R}$ y

- $F'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t) - f(g(t)) \cdot g'(t)$ (*)

★] Por TFC, $F(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x) dx = F(h(t)) - F(g(t))$

$\Rightarrow F'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t) - F'(g(t)) \cdot g'(t)$ y $F' = f$
 $= f(h(t)) \cdot h'(t) - f(g(t)) \cdot g'(t)$

$\Rightarrow F'(t) = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t^3}{2}\right) \cdot 3t^2 - \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t^2}{2}\right) \cdot 2t$

$= 3t^2 \cos^2\left(\frac{\pi t^3}{2}\right) - 2t \cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)$

Note que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2\left(\frac{\pi t^3}{2}\right)$ y $\cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \geq 0$ luego, tenemos
 $\alpha(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t^3}{2}\right)$ y $\beta(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)$.
 Así:

$$F'(t) = 3t^2\alpha(t) - 2t\beta(t)$$

Considera $t < 0$, entonces:

$$3t^2\alpha(t) - 2t\beta(t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow F'(t) \geq 0, \forall t < 0$$

Con esto concluimos que F es creciente cerca de $t = -1$.

P2 a) Un objeto se mueve con velocidad $v(t) = 6t^2 + 10t$. Determine la función posición $s(t)$ del objeto, si se sabe que $s(0) = 5 \text{ [m]}$.

Sol: Sabemos que $s'(t) = v(t)$ y $s(0) = 5$. Por otro lado, como v es continua en $\mathbb{R}$, en particular $\forall t \geq 0$, por regla de Barrow:

$$\int_0^t v(x) dx = s(t) - s(0) \quad (*)$$

Así:

$$\begin{aligned} \int_0^t v(x) dx &= \int_0^t (6x^2 + 10x) dx \\ &= \int_0^t 6x^2 dx + \int_0^t 10x dx \\ &= \left. \frac{6x^3}{3} \right|_0^t + \left. \frac{10x^2}{2} \right|_0^t \quad \text{aquí usamos TFC} \\ &= \frac{6t^3}{3} - \frac{6(0)^3}{3} + \frac{10t^2}{2} - \frac{10(0)^2}{2} \end{aligned}$$

$$= 2t^3 + 5t^2$$

Iguando con (*):

$$2t^3 + 5t^2 = s(t) - s(0) \quad \text{y } s(0) = 5$$

$$\Rightarrow s(t) - 5 = 2t^3 + 5t^2$$

$$\Rightarrow s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$$

$\therefore$ La función posición del objeto es $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$ //

b) Sobre este objeto actúa una fuerza que varía de forma continua en función de la posición s . Se define el trabajo W realizado por la fuerza F , desde la posición a hasta la posición b sobre el objeto como:

$$W = \int_a^b F(s) ds$$

Si cuando el objeto se encuentra en la posición s la fuerza F es $F(s) = 4s - 2$, determine el trabajo realizado por la fuerza durante el desplazamiento del objeto desde su posición en el instante $t=1$ hasta su posición en el instante $t=3$.

Sol: Por a), $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$ luego

$$\begin{aligned} \bullet \text{ En } t=1 : s(1) &= 2(1)^3 + 5(1)^2 + 5 \\ &= 2 + 5 + 5 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ En } t=3 : s(3) &= 2(3)^3 + 5(3)^2 + 5 \\ &= 2 \cdot 27 + 5 \cdot 9 + 5 \\ &= 54 + 45 + 5 \end{aligned}$$

$$= 104$$

Nos piden:

$$W = \int_{s(1)}^{s(3)} (4s-2) ds$$

$$= \int_{12}^{104} (4s-2) ds$$

$$= \int_{12}^{104} 4s ds - \int_{12}^{104} 2 ds$$

$$= \left(\frac{4s^2}{2} \Big|_{12}^{104} \right) - \left(2s \Big|_{12}^{104} \right) \quad \text{donde usamos TFC}$$

pues $4s$ y 2 son constantes en $\mathbb{R}$

$$= 2s^2 \Big|_{12}^{104} - \left(2s \Big|_{12}^{104} \right)$$

$$= 2(104)^2 - 2(12)^2 - (2(104) - 2(12))$$

$$= 21632 - 288 - 208 + 24$$

$$= 21160 //$$

P3) a) Demuestre que si f es una función continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x) dx = 0$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Sol: Teorema del Valor medio: Sea f continua en $[a, b]$ entonces $\exists c \in [a, b]$ para el cual

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

• OBS: Se dice que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ es el valor medio o promedio de $f(x)$ en $[a, b]$.

Caso f continua en $[a, b]$, por TVM; $\exists c \in [a, b]$ tal que:

$\downarrow$
para integrales

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a),$$

pero $\int_a^b f(x) dx = 0$

$$\Rightarrow f(c)(b-a) = 0$$

$$\Rightarrow f(c) = 0$$

- OBS: Note que si llamamos $G = \int_a^b f(x) dx$, como f continua en $[a, b]$, por P.T.F.C, G continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $G' = f$. Luego, por TVM para derivadas; $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{G(b) - G(a)}{b-a} = G'(c)$$

y como $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$ pues $G' = f$ y $G'(c) = f(c)$ se tiene que:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(c) //$$

b) Determine el n° real a para el cual el valor promedio de $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ en $[0, a]$ sea igual a 1.

Sol: Buscamos a tal que $\int_0^a \frac{f(x) dx}{a-0} = 1 \quad (*)$

Calculemos $\int_0^a f(x) dx$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a \frac{4 dx}{(x+1)^2}$$

$$= 4 \int_0^a \frac{dx}{(x+1)^2}$$

y considere $F(x) = \frac{-1}{(x+1)}$ continua y derivable en $[0, a]$ donde

$$F'(x) = \left(\frac{-1}{(x+1)} \right)' = \left(-(x+1)^{-1} \right)' = (x+1)^{-2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 4 \int_0^a \frac{dx}{(x+1)^2} = 4 \left(\frac{-1}{(x+1)} \Big|_0^a \right) \quad / \text{ por TFC pues } \frac{1}{(x+1)^2} \text{ continua en } [0, a]$$

$$= 4 \left(\frac{-1}{(a+1)} + \frac{1}{(0+1)} \right)$$

$$= 4 - \frac{4}{a+1}$$

Reemplazando en (*):

$$\frac{4 - \frac{4}{a+1}}{a} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{4}{a+1} = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(a+1) - 4}{a+1} = a \quad \text{y } a \neq -1$$

$$\Leftrightarrow 4(a+1) - 4 = a(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4 - 4 = a^2 + a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-3)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \vee a=3, \text{ pero } a \neq 0 \text{ (no tendr\'a sentido buscarlo 0)}$$

Luego, el valor buscado que cumple lo pedido es $a=3$.

c) Para el valor de a hallado en b), encuentre un $c \in [0, a]$ tal que $f(c)$ sea igual al valor promedio de la funci3n en $[0, a]$.

Sol: Sea $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ como en b), que es continua en $[0, 3]$ (tiene una asintota en $x=-1$, pero $-1 \notin [0, 3]$)

Asi, por TVM para integrales, $\exists c \in [0, 3]$ tal que:

$$\int_0^3 f(x) dx = f(c)(3-0)$$

$$\Rightarrow 3f(c) = \int_0^3 f(x) dx$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{\int_0^3 f(x) dx}{3} \quad \text{y por a), } \frac{\int_0^3 f(x) dx}{3} = 1$$

$$\Rightarrow f(c) = 1$$

Para encontrar tal $c \in [0, 3]$, usamos que $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$:

$$\frac{4}{(c+1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 = (c+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 = c^2 + 2c + 1$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 2c - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c+3)(c-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -3 \vee c = 1$$

pues $c \in [9, 3]$

$\Rightarrow$ El valor de c buscado es $c = 1$

P4) Sea $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $G(t) = \int_{\sin(9t)}^0 x dx - \int_0^{\cos(9t)} x dx$. Demuestre que G es una función constante.

Sol: pt: G es constante

$$\text{Tenemos que } G(t) = \int_{\sin(9t)}^0 x dx - \int_0^{\cos(9t)} x dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\sin(9t)}^0 - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\cos(9t)}$$

donde hemos usado T.F.C. pues x continua en $\mathbb{R}$ y $\frac{x^2}{2}$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $\left(\frac{x^2}{2} \right)' = x$.

$$= \left\{ \frac{0^2}{2} - \frac{(\sin(9t))^2}{2} \right\} - \left\{ \frac{(\cos(9t))^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right\}$$

$$= -\frac{\sin^2(9t)}{2} - \frac{\cos^2(9t)}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} (\sin^2(9t) + \cos^2(9t))$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow G$ es constante.

Forma 2: pol: $G'(t) = 0$

$$G(t) = \int_{\text{sen}(9t)}^0 x dx - \int_0^{\cos(9t)} x dx$$

y llave $G_1(t) = \int_{\text{sen}(9t)}^0 x dx$

$$G_2(t) = \int_0^{\cos(9t)} x dx$$

$$\Rightarrow G'(t) = G_1'(t) - G_2'(t)$$

Luego, por TFC, llamando $\varphi(x) = x$, $g(t) = \text{sen}(9t)$, $h(t) = \cos(9t)$ donde φ continua en $\mathbb{R}$ y g y h derivables en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad G_1'(t) &= \varphi(0) \cdot (0)' - \varphi(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= 0 - (\text{sen}(9t)) \cdot \cos(9t) \cdot 9 \\ &= -9 \text{sen}(9t) \cos(9t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad G_2'(t) &= \varphi(h(t)) \cdot h'(t) - \varphi(0) \cdot 0' \\ &= \cos(9t) \cdot (-\text{sen}(9t)) \cdot 9 \\ &= -9 \text{sen}(9t) \cos(9t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G'(t) &= -9 \text{sen}(9t) \cos(9t) + 9 \text{sen}(9t) \cos(9t) \\ &= 0 // \end{aligned}$$

$\therefore G$ es constante.

P5) Determine el valor de $\int_1^3 \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy dx$.

Sol. Se tiene que:

$$\int_1^3 \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy dx = \int_1^3 \left(\int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy \right) dx$$

y llamemos $H(x) = \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy$, luego, lo que queremos determinar es:

$$\int_1^3 H(x) dx$$

y para eso es claro que debemos obtener $H(x)$ primero.

$$\begin{aligned} \bullet H(x) &= \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_{-x}^x x^2 dy - \int_{-x}^x y^2 dy, \text{ pero aqu\u00ed } x \text{ es constante} \\ &= x^2 \int_{-x}^x dy - \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{-x}^x \right) \text{ / usamos TFC} \\ &= x^2 \left(y \Big|_{-x}^x \right) - \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3} \right\} \text{ / usamos TFC} \\ &= x^2 (x - (-x)) - \left\{ \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right\} \\ &= x^2 (2x) - 2 \frac{x^3}{3} \\ &= 2x^3 - \frac{2x^3}{3} \\ &= \frac{6x^3 - 2x^3}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{4x^3}{3}$$

Assi, $H(x) = \frac{4x^3}{3}$

Com isto, nos falta calcular $\int_1^3 H(x) dx = \int_1^3 \frac{4x^3}{3} dx$

$$\begin{aligned} \cdot \int_1^3 \frac{4x^3}{3} dx &= \frac{4}{3} \int_1^3 x^3 dx \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_1^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(x^4 \Big|_1^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} (3^4 - 1^4) \\ &= \frac{1}{3} (81 - 1) \\ &= \frac{80}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^3 \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy dx = \frac{80}{3}$$