

P2 $F(t) = \int_{t^2}^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$

→ calcular $F'(t)$

→ ¿Es F creciente al rededor de $t = -1$?

~~solución:~~

Recordo: sea $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ con $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

El T.F.C nos dice que (bajo la condición de que f sea continua en $t=t_0$) F es derivable en $t=t_0$ y $F'(t_0) = f(t_0)$.

OBS: Esto es independiente de " a ", el límite inferior de la integral.

Con esto, podemos dar sentido a derivadas de funciones como $G(x) = \int_0^x \sin(t) dt$

y expresiones más "complejas" como

$H(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(s) ds$. ¿Qué hacemos con esta

última función? Respuesta corta: Regla de

la cadena. ¿cómo? Sea $z = t^2 + 1$. De este

modo, H depende de z , la cual depende de

t y por lo tanto $\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$.

Así, reescribimos $H(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(s) ds$

$$\leadsto \int_0^{z(t)} \sin(s) ds. \text{ Así, } H'(t) = \frac{d}{dz} \left(\int_0^z \sin(s) ds \right)$$

$$\cdot \frac{dz}{dt}.$$

(T.F.C)

$$\Rightarrow H'(t) = \sin(z) \cdot \frac{dz}{dt} = \sin(t^2+1) \cdot 2t$$

Em otras palabras, $\left(\int_a^{f(t)} g(s) ds \right)'_{(t_0)} = g(f(t_0)) \cdot f'(t_0).$

Com esto em mente, estamos listos para enfrentar la P1. "

Propiedades importantes que recordar:

$$1) \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

("c" no tiene por qué estar entre "a" y "b")

$$2) \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

Solución

(ahora sí)

$$\left(\int_{t^2}^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \right)' = \left(\int_{t^2}^0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx + \int_0^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \right)'$$
$$= \left(\int_0^{t^3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \right)' - \left(\int_0^{t^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \right)'$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t^3\right) \cdot 3t^2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \cdot 2t //$$

evaluando para $t = -1$:

$$F'(-1) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2$$
$$= 0 + 0 = 0$$

∴ F no crecientemente en 0.

P2] a) $V(t) = 6t^2 + 10t$ / $S(0) = 5$ calcule $S(t)$

Forma 1: $S(t) = \int 6t^2 + 10t dt = 6 \frac{t^3}{3} + 10 \frac{t^2}{2} + C$

$$= 2t^3 + 5t^2 + C$$

imponiendo la condición: $5 = 2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2 + C$

$\Rightarrow \boxed{C=5} \Rightarrow S(t) = \cancel{6t^3} 2t^3 + 5t^2 + 5 //$

Forma 2: $S(t) = S(0) + \int_0^t V(t) dt = 5 + \int_0^t 6t^2 + 10t dt$

$$= 5 + (2t^3 + 5t^2) \Big|_0^t = 5 + 2t^3 + 5t^2 //$$

b) $W = \int_a^b F(s) ds$ / $F(s) = 4s - 2$

posición en $t=1$: $S(1) = 2 + 5 + 5 = 12$

posición en $t=3$: $S(3) = 2 \cdot 27 + 5 \cdot 9 + 5 = 54 + 45 + 5 = 104$

Luego:

$$W = \int_{12}^{104} (4s - 2) ds = 4 \frac{s^2}{2} - 2s \Big|_{12}^{104} = 2s^2 - 2s \Big|_{12}^{104}$$

$$= (2 \cdot 104^2 - 2 \cdot 104) - (2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12)$$

//
✓

P3 Recordemos: EL T.V.M para integrales dice que
a) si f es función continua en $[a, b]$, entonces
existe un $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$
o en otras palabras (bajo el supuesto de
que $b \neq a$):

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

En este problema, trabajamos bajo el caso
 $\int_a^b f(x) dx = 0$, es decir, tenemos que
existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c)(a-b) = 0$.

Pero podemos libremente asumir $a \neq b \Leftrightarrow a-b \neq 0$
puesto que de lo contrario estaríamos trabajando
con un solo punto. Luego, $f(c) = 0$ para este c . $\square$.

b) Recordo: El valor promedio de f en $[a, b]$

viene dado por:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \text{ Por lo tanto, estamos}$$

imponiendo la siguiente condición:

$$\frac{1}{a} \int_0^a \frac{4}{(x+1)^2} dx = 1 \quad (\Rightarrow) \quad 4 \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2} dx = a$$

(a ≠ 0)

$$- (x+1)^{-1} \Big|_0^a = -\frac{a}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{4} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{a+1} + \frac{1}{0+1} = \frac{a}{4} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{-1}{a+1} = \frac{a}{4} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{a}{4} = \frac{1}{a+1} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4-a}{4} = \frac{1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + 3a + 4 = 4 \quad (\Rightarrow) \quad a(3-a) = 0$$

pero como $a \neq 0$, $a = 3$

c) busco un $C \in [0, 3]$ para que $f(C) = 1$.

Debemos resolver la ecuación:

$$\frac{4}{(x+1)^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x+1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{tomo la}$$

solución positiva para que esté en $[0, 3]$

$$\therefore \quad \boxed{C = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

P41

$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(t) = \int_{\sin(qt)}^0 x \, dx - \int_0^{\cos(qt)} x \, dx$$

Demostremos que esto es constante probando que su derivada siempre es 0. Para esto,

reescribimos G como sigue:

$$G(t) = - \int_0^{\cos(qt)} x \, dx - \int_0^{\sin(qt)} x \, dx$$

(uego:

$$G'(t) = - \left(\int_0^{\cos(qt)} x \, dx \right)' - \left(\int_0^{\sin(qt)} x \, dx \right)' \quad (\text{T.F.C})$$

$$= - \cos(qt) \cdot (\cos(qt))' - \sin(qt) \cdot (\sin(qt))'$$

$$= + \cos(qt) \sin(qt) \cdot q - \sin(qt) \cdot \cos(qt) \cdot q$$

$$= 0 \Rightarrow G \text{ constante} \quad \square$$

P5 $\int_1^3 \left(\int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy \right) dx$

~~Ⓢ~~ $\textcircled{8} = \int_{-x}^x x^2 dy - \int_{-x}^x y^2 dy$

→ cte! → no cte.

$$= x^2 \int_{-x}^x 1 dy - \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-x}^x = x^2 \cdot 2x - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right)$$

$$= 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 = \boxed{\frac{4}{3}x^3}$$

luego, queremos calcular:

$$\int_1^3 \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{4}{3} \int_1^3 x^3 dx = \frac{4}{3} \cdot \left. \frac{x^4}{4} \right|_1^3$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = \boxed{\frac{80}{3}}$$