Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2019

Taller de ayudantía 4
Optimización, derivación implícita y razón de cambio

21/08/2019

En este taller, aplicaremos el cálculo diferencial para optimizar ciertas funciones en problemas contextualizados. Además, calcularemos las rectas tangentes y normales a una curva utilizando la derivación implícita. Finalmente, aplicaremos derivación implícita en problemas contextualizados para analizar la razón de cambio de ciertas funciones que dependen del tiempo.

Objetivos:

- Optimizar funciones aplicando el cálculo diferencial.
- Aplicar la derivación implícita para calcular la recta tangente y normal al gráfico de una función.
- Analizar la razón de cambio de ciertas funciones utilizando derivación implícita.

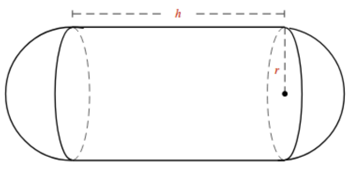
Ejercicios Propuestos

1. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva

$$\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x$$

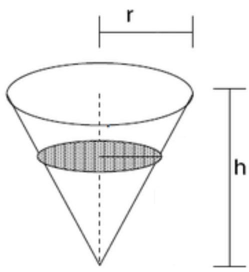
   en el punto $(-1, 1)$.

2. Se desea construir un estanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por metro cuadrado en los extremos es $2P_0$ y el costo en la parte cilíndrica es P_0. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 18π [m^3]?



   Hint: El volumen de una esfera es $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $4\pi r^2$.

3. De un estanque con forma de cono invertido se está extrayendo agua a razón de $75\pi\left[\dfrac{\text{cm}^3}{\text{min}}\right]$ y simultáneamente se está vertiendo agua a él a razón constante $750\pi\left[\dfrac{\text{cm}^3}{\text{min}}\right]$. La altura y radio del estanque son 200 y 100 cm, respectivamente. Determine la razón con la que varía el área transversal del cono de agua respecto del tiempo, en el momento en que su radio está aumentando a razón de $15\left[\dfrac{\text{cm}}{\text{min}}\right]$.



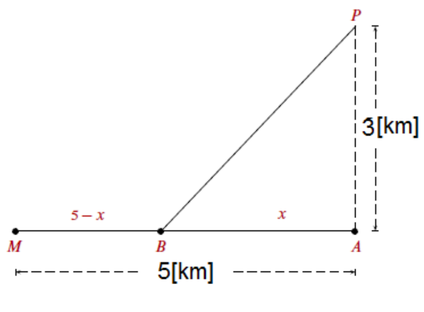
Ejercicios opcionales

1. Sea l la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitud x e y, respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de 1/2[m/s] y si y disminuye con una rapidez de 1/4[m/s].

   a) ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$[m] e $y = 4$[m]?

   b) ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

2. En un concurso de resistencia, los participantes están 3 kilómetros mar adentro(punto P) y tienen que llegar a un sitio en la orilla(punto M) que está a 5 kilómetros al oeste (como se muestra en la figura).



   Suponiendo que un concursante puede nadar a 4 kilómetros por hora y correr a 10 kilómetros por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar(punto B) para minimizar el tiempo total de recorrido?

La luz entrará en tu mente para que veas lo bueno en cada situación
y con optimismo seguiremos avanzando, paso a pasito, sin dar espacio a la duda.
Así, cuando logres el objetivo, nadie te quitará la felicidad de haber superado tus límites.