

Ayudantía 13
(12/12/2020)

P11 Determine el conjunto de todas las funciones que son solución de la siguiente EDO:

$$xy y'(x) - \ln(x) = 0$$

Sol. Se tiene entonces:

$$xy y' - \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy y' = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow yy' = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x > 0$$

que es una EDO de variables separables
Así:

$$yy' = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow y \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow y dy = \frac{\ln(x)}{x} dx \quad | \int$$

$$\Leftrightarrow \int y dy = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \int \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \text{cv: } u = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \int u du$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{u^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow y^2(x) = \ln^2(x) + K, \text{ con } K = 2C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \pm \sqrt{\ln^2(x) + K}$$

$$\text{con } \ln^2(x) + K \geq 0$$

$\therefore$ la solución general de la EDO es

$$y(x) = \pm \sqrt{\ln^2(x) + K} \text{ con } \ln^2(x) + K \geq 0$$

P2 Resuelva el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} \cdot y'(x) - \sqrt{1-y^2} &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Sol. Se tiene que:

$$\sqrt{1-x^2} \cdot y' - \sqrt{1-y^2} = 0, \quad x, y \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

, $x, y \in (-1, 1)$
(note que $y = 1, -1$ son soluciones triviales de la EDO)

es una EDO de variables separables
Osi

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad | \int$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{cv: } y = \text{sen}(u) \quad , \quad x = \text{sen}(v) \\ dy = \cos(u) du \quad dx = \cos(v) dv$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\cos(u) du}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(u)}} = \int \frac{\cos(v) dv}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(v)}}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\cancel{\cos(u)} du}{\cancel{\cos(u)}} = \int \frac{\cancel{\cos(v)} dv}{\cancel{\cos(v)}}$$

$$\Leftrightarrow \int du = \int dv$$

$$\Leftrightarrow u = v + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \arcsen(y) = \arcsen(x) + C$$

$$\Leftrightarrow y = \text{sen}(\arcsen(x) + C) \quad , \quad x \in (-1, 1), C \in \mathbb{R}$$

pero $y = 1, -1$ también es solución de la EDO, luego, la solución es

$$y(x) = \text{sen}(\arcsen(x) + C) \quad , \quad x \in [-1, 1], C \in \mathbb{R}$$

Note que:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \cdot (\text{sen}(\arcsen(x) + C))' - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\arcsen(x) + C)} \\ &= \sqrt{1-x^2} \cdot \cos(\arcsen(x) + C) \cdot (\arcsen(x) + C)' \\ & \quad - \cos(\arcsen(x) + C) \\ &= \sqrt{1-x^2} \cdot \cos(\arcsen(x) + C) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos(\arcsen(x) + C) \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

• OBS: Para ver que soluciones constantes (o triviales) tiene esta EDO, la escribimos de la forma:

$$y'(x) = f(x) g(y)$$

y buscamos la y tal que $g(y) = 0$.

Note que, haciendo lo anterior, escribimos:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{Luego } \sqrt{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ó } -1$$

$\therefore$ Las soluciones constantes de la EDO son 1 y -1 (ya lo sabemos).

Finalmente, se sabe que $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 &= \text{sen}(\arcsen(0) + C) \\ &= \text{sen}(0 + C) \\ &= \text{sen}(C) \end{aligned}$$

$$\text{Así, } C = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore y(x) = \text{sen}(\arcsen(x) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} &= \text{sen}(\arcsen(x)) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\quad + \text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cdot \cos(\arcsen(x)) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{propiedad que} \\ \text{separa } \text{sen}(\alpha + \beta) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow y(x) = \cos(\arcsen(x)) //$$

P3] Hallar la solución general de:

$$a) y'(x) - \tan(x)y(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$$

Sol: Esta EDO es una EDO lineal de 1^{er} orden no homogénea (recuerda que una EDO lineal de 1^{er} orden es de la forma:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

y es homogénea si $q(x) = 0$ y no homogénea si $q(x) \neq 0$)

Note que esta EDO ya está normalizada (es decir, el coeficiente que acompaña a $y'(x)$ es 1, si no fuera el caso, se debe normalizar la EDO dividiendo todo por el coeficiente que acompaña a $y'(x)$ con su posible restricción)

Para resolver la EDO, procedemos a calcular el FACTOR INTEGRANTE:

$$u(x) = e^{\int p(x) dx}$$

donde $p(x)$ es el coeficiente que acompaña a $y(x)$ POSTERIOR a que la EDO fue normalizada

En este caso, $p(x) = -\tan(x)$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\int -\tan(x) dx}$$

$$\begin{aligned} y \int -\tan(x) dx &= \int -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx & \text{cv: } u &= \cos(x) \\ & & du &= -\sin(x) dx \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| \\ &= \ln|\cos(x)| \end{aligned}$$

y buscamos el $u(x)$ MÁS SIMPLE para realizar el procedimiento

$$\Rightarrow u(x) = e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$$

Multiplíquese a ambos lados de la EDO por $u(x)$ queda:

$$\cos(x) y'(x) - \cos(x) \tan(x) y(x) = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow (y \cos(x))' = \cos(x) \quad | \int dx$$

$$\Leftrightarrow \int (y \cos(x))' dx = \int \cos(x) dx$$

$$\Leftrightarrow y \cos(x) = \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \parallel$$

b) $y'(x) + xy(x) = 100x$

Sol: Se encuentra normalizada ✓

Calculamos $u(x)$:

$$u(x) = e^{\int x dx} \\ = e^{x^2/2}$$

(note que $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, pero queremos el factor integrante más simple, por lo que tomamos $C=0$)

Así:

$$e^{x^2/2} y'(x) + x e^{x^2/2} y(x) = 100x e^{x^2/2}$$

$$\Leftrightarrow (y e^{x^2/2})' = 100x e^{x^2/2} \quad | \int dx$$

$$\Leftrightarrow \int (y e^{x^2/2})' dx = \int 100x e^{x^2/2} dx$$

$$\Leftrightarrow y e^{x^2/2} = 100 \int x e^{x^2/2} dx \quad \begin{aligned} (e^{x^2/2})' &= e^{x^2/2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' \\ &= e^{x^2/2} \cdot \frac{2x}{2} \\ &= e^{x^2/2} x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y e^{x^2/2} = 100 e^{x^2/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\therefore y(x) = 100 + Ce^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

P41 Halle la solución general de :

$$y'(t) + \frac{4y(t)}{200+t} = \frac{5}{2}$$

Sol: Normalizada $\checkmark$ y $t \neq -200$.

Calculemos $u(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int \frac{4}{200+t} dt} \\ &= e^{4 \ln(200+t)} \\ &= e^{\ln(200+t)^4} \\ &= (200+t)^4 \end{aligned}$$

Q5:

$$(200+t)^4 y'(t) + \frac{4}{(200+t)} \cdot (200+t)^4 y(t) = \frac{5}{2} (200+t)^4$$

$$\Leftrightarrow (y'(200+t)^4)' = \frac{5}{2} (200+t)^4 \quad | \int dt$$

$$\Leftrightarrow \int (y'(200+t)^4)' dt = \int \frac{5}{2} (200+t)^4 dt$$

$$\Leftrightarrow y(200+t)^4 = \frac{5}{2} \int (200+t)^4 dt$$

$$\Leftrightarrow y(200+t)^4 = \frac{5}{2} \left(\frac{(200+t)^5}{5} + C \right), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(200+t)^4 = \frac{(200+t)^5}{2} + K, \quad \text{con } K = \frac{5C}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\therefore y(t) = \frac{(200+t)}{2} + \frac{K}{(200+t)^4}, \quad K \in \mathbb{R}$$