P1) a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

Resolvamos esa integral

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx \quad \Big/ \quad u=e^x \to du = u\,dx \to dx = \frac{1}{u}\,du$$

$$= \int \frac{1}{(u+u^{-1})\,u}\,du = \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{arctg}(u) + c$$

$$= \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Evaluando: $\int_0^{a} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \operatorname{arctg}(e^x)\Big|_0^a$

$$= \operatorname{arctg}(e^a) - \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}(e^a) - \frac{\pi}{4}$$

Tomando Límite:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(e^a) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg}(e^a) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

usamos que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto la integral converge ∎

b) $\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} e^{-x} \operatorname{sen}(x)\, dx.$

Primitiva:

$\int e^{-x} \operatorname{sem}(x)\, dx$ | $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ — $g'(x) = e^{-x}$; $f'(x) = \cos(x)$ — $g(x) = -e^{-x}$

$= -e^{-x} \operatorname{sen}(x) + \int e^{-x} \cos(x)\, dx$ | $f(x) = \cos(x)$ — $g'(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ — $g(x) = -e^{-x}$

$= -e^{-x} \operatorname{son}(x) - e^{-x} \cos(x) - \int \operatorname{sem}(x)\, e^{-x}\, dx$

$\therefore \int e^{-x} \operatorname{sen}(x)\, dx = \dfrac{-e^{-x}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))}{2}$

Evaluando:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \left[\frac{-\overbrace{e^{-a}}^{\to 0}\overbrace{(\operatorname{son}(a) + \cos(a))}^{\to \text{acotado}}}{2} - \frac{-1(0+1)}{2} \right]$$

$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ La integral converge.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

nota: La función $\frac{1}{x^2+4}$ es par. Por lo tanto, la integral que tenemos es equivalente a

$$2\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Primitiva: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$

$u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\operatorname{arctg}(u)}{2} + C$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + C.$$

Tomando Limite: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = 2\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{1}{x^2+4}\,dx$

$$= \cancel{2}\lim_{a\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2}\right)}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{\operatorname{arctg}(0)}{2}}\right] = \lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

usando que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$

∴ La integral converge.

d) $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

Primitiva: $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

F.P

$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = A(x+2) + B(x-1)$

$\boxed{x=1}$ $\quad 1 = 3A \rightarrow A = \frac{1}{3}$

$\boxed{x=-2}$ $\quad 1 = -3B \rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$= \int \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx$

$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2|$

estos módulos no importan porque estamos en el intervalo $[2,\infty[$.

$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + C$

Evaluando:

$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{a-1}{a+2}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-1}{2+2}\right)\right]$

$\frac{2-1}{2+2} \to 1/4$

$\frac{1}{3}\lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{a-1}{a+2}\right) - \frac{1}{3}\ln(1/4)$

notar que $\lim_{a\to\infty}\frac{a-1}{a+2} = 1$ y $\ln(1)=0$

$\ln(x)$ es continua en $x=1$.

$\therefore \lim_{a\to\infty}\ln\left(\frac{a-1}{a+2}\right) = 0.$

$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\ln(4) = \frac{\ln(4)}{3}$ ▨

$\therefore$ La integral converge.

P2

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-x} x^{m-1}\,dx$$

usando integración por partes:

$$f(x) = x^{m-1} \qquad g'(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = (m-1)\,x^{m-2} \qquad g(x) = -e^{-x}$$

entonces tenemos

$$\Gamma(m) = \lim_{a\to\infty} \left(-x^{m-1} e^{-x} \Big|_0^a + (m-1) \int_0^a x^{m-2} e^{-x}\,dx \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-a^{m-1}}{e^a} + (m-1) \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^{m-2} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-a^{m-1}}{e^a} + (m-1) \int_0^{\infty} x^{m-2} e^{-x}\,dx$$

$$\to \Gamma(m-1)$$

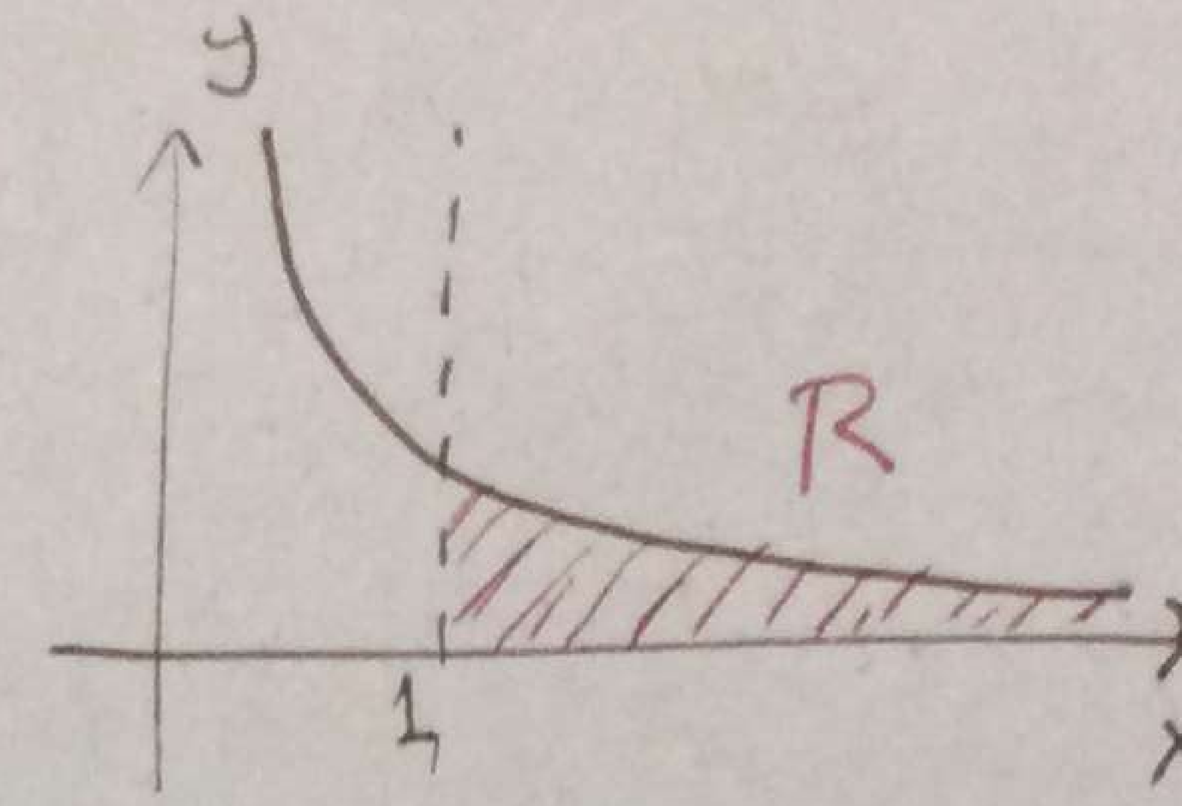
Así,

$$\Gamma(m) = (m-1)\,\Gamma(m-1) - \lim_{a\to\infty} \frac{a^{m-1}}{e^a}$$

Pero $\lim_{a\to\infty} \frac{a^{m-1}}{e^a} = 0$ utilizando regla de L'Hôpital ya que tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$

P3 $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$

Dibujemos la región R



a) el área de R viene dada por $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \ln(a)$

Pero $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \ln(a) = \infty$. Por lo tanto la integral diverge y el área es infinita.

b) el volumen de rotación viene dado por $\displaystyle\pi\int_1^{\infty} \left(\tfrac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = \pi\lim_{a\to\infty}\int_1^{a} x^{-2}\,dx$

$$= \pi \lim_{a\to\infty} -x^{-1}\Big|_1^a = \pi \lim_{a\to\infty}\left(-a^{-1} + 1^{-1}\right)$$

$$= \pi \lim_{a\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi$$

$\therefore$ la integral converge y el ~~área~~ volumen es finito !!