

Ayudantía 9
03/10/2019

P1) Halle el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ sobre el intervalo $[0, a]$. Demuestre que el área nunca es mayor o igual a $1/2$.

(Ayuda: Demuestre que $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$)

Sol: Note que si $x \in [0, a]$ entonces $x > 0$, además $\ln(2) > 0$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > 0, \forall x \in [0, a]$$

Así, el área bajo la gráfica de f sobre $[0, a]$ es:

$$\int_0^a f(x) dx$$

Calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} dx & y \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} &= e^{\ln(\frac{1}{2})x^2} \\ &= \int_0^a \ln(2) \times e^{-\ln(2)x^2} dx & &= e^{\ln(2^{-1})x^2} \\ & & &= e^{-\ln(2)x^2} \end{aligned}$$

Considere $F(x) = -\frac{e^{-\ln(2)x^2}}{2}$ donde $F'(x) = -\frac{1}{2} (e^{-\ln(2)x^2})'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F \text{ es una primitiva de } f(x) \text{ y:} &= -\frac{1}{2} (e^{-\ln(2)x^2} \cdot -2x \ln(2)) \\ &= \ln(2) x e^{-\ln(2)x^2} \end{aligned}$$

- 1) F es derivable y continua en $\mathbb{R}$
- 2) f continua en $\mathbb{R}$

Luego, por TFC:

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x) dx &= \left(-e^{\frac{\ln(2)x^2}{2}} \Big|_0^a \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{\ln(2)x^2} \Big|_0^a \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{\ln(2)a^2} - e^{\ln(2)0^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{\ln(2^{-1})a^2} - e^0 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{\ln(1/2)a^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - e^{\ln(1/2)a^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln(1/2)a^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Área}|_{[0,a]} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln(1/2)a^2}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\text{Área} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{\ln(1/2)a^2} = \cancel{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}} e^{\ln(1/2)a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{\ln(1/2)a^2} = 0
\end{aligned}$$

Lo que NO puede pasar pues $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \text{Área} \neq \frac{1}{2}, \forall a > 0$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \text{Área} > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{\ln(1/2)a^2} > \cancel{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow 0 > \cancel{\frac{1}{2}} e^{\ln(1/2)a^2} \\ &\Leftrightarrow 0 > e^{\ln(1/2)(a^2+1)} \end{aligned}$$

lo que es una contradicción pues $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Así, Área encontrada nunca es mayor o igual a $1/2, \forall a > 0 //$

P2 Si a un estanque se vierte agua con un flujo de $r(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}}, 0 \leq t \leq 19$ litros de agua por hora.

a) ¿Cuántos litros de agua se habrán vertido al estanque en las 19 horas?

Sol: Note que $r(t)$ es continua en $[0, 19]$ luego integrable en $[0, 19]$. Según la interpretación de integral definida, lo que nos piden es:

$$\int_0^{19} r(t) dt$$

Calculemos dicha integral.

$$\begin{aligned} \int_0^{19} r(t) dt &= \int_0^{19} \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}} dt \\ &= \int_0^{19} \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{(t+8)^2}} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{19} (t+8)^{-2/3} dt$$

y considere $F(t) = 3(t+8)^{1/3}$ donde

$$\begin{aligned} F'(t) &= 3((t+8)^{1/3})' \\ &= 3\left(\frac{1}{3}(t+8)^{1/3-1}\right) \\ &= (t+8)^{-2/3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ es una primitiva de f y

- 1) F es continua en $[0, 19]$ y derivable en $(0, 19)$
- 2) f es continua en $[0, 19]$

Así, por TFC:

$$\begin{aligned} \int_0^{19} r(t) dt &= 3(t+8)^{1/3} \Big|_0^{19} \\ &= 3((t+8)^{1/3} \Big|_0^{19}) \\ &= 3((19+8)^{1/3} - (0+8)^{1/3}) \\ &= 3((27)^{1/3} - (8)^{1/3}) \\ &= 3(3 - 2) \\ &= 3(1) \\ &= 3 // \end{aligned}$$

$\therefore$ En las 19 horas se habrán vertido al estanque 3 litros //

b) Determine el flujo promedio en las 19 horas y el instante t^* en que el flujo es igual al flujo promedio.

Sol: Nos piden
$$\frac{\int_0^{19} r(t) dt}{19-0}$$

Por a), $\int_0^{19} r(t) dt = 3$

$\Rightarrow$ Flujo promedio es igual a $\frac{3}{19}$ l/hr.

Ahora, como $r(t)$ es continua en $[0, 19]$, por TVM, $\exists t^* \in [0, 19]$ tal que:

$$\int_0^{19} r(t) dt = r(t^*) (19-0)$$

$\Rightarrow \exists t^* \in [0, 19]$ tal que $\frac{\int_0^{19} r(t) dt}{19} = r(t^*)$, o sea, $\exists t^* \in [0, 19]$ tal que el flujo es igual al flujo promedio.

Iguando:
$$\frac{3}{19} = r(t^*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{19} = \sqrt[3]{\frac{1}{(t^*+8)^2}} \quad / ()^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^3}{19^3} = \frac{1}{(t^*+8)^2}$$

$$\Leftrightarrow (t^*+8)^2 = \frac{19^2 \cdot 19}{3^2 \cdot 3} \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow (t^*+8) = \frac{19 \sqrt{19}}{3 \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (t_k + 8) = \frac{19\sqrt{19}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (t_k + 8) = \frac{19\sqrt{57}}{9}$$

$$\Leftrightarrow t_k = \frac{19\sqrt{57}}{9} - 8 \approx 7,9$$

$\therefore$ El flujo es igual al promedio cuando $t_k \approx 7,9$ horas.

P3 En las dinámicas de poblaciones de peces explotadas, un modelo que relaciona la población disponible (stock reproductivo) P con el reclutamiento R está dado por el modelo de Pichler:

$$R(P) = aPe^{-bP}, P \geq 0$$

donde a y b constantes positivas.

Se requiere:

a) Realice análisis gráfico de $R(P)$.

Sol: Veamos lo necesario para el gráfico de R .

i) Intersección con los ejes:

$$\begin{aligned} \cdot P=0 &\Rightarrow R(0) = a \cdot 0 \cdot e^{-b \cdot 0} \\ &= 0 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $(0,0)$ es un intercepto.

- $R(P)=0 \Leftrightarrow aPe^{-bP}=0$
 $\Leftrightarrow P=0$ pues $e^{-bP} > 0, \forall P \geq 0$ y $a > 0$

$\therefore$ El único punto de intersección con los ejes es $(0,0)$.

ii) Asíntotas:

- Verticales:

No hay puntos que undefinan la función R , luego no existen asíntotas verticales.

- Horizontales:

Analizamos $\lim_{P \rightarrow +\infty} R(P)$ (no analizamos $P \rightarrow -\infty$ pues la función $R(P)$ tiene dominio $[0, +\infty)$)

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow +\infty} R(P) &= \lim_{P \rightarrow +\infty} aPe^{-bP} \\ &= a \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{P}{e^{bP}} \end{aligned}$$

y $\lim_{P \rightarrow +\infty} P = \lim_{P \rightarrow +\infty} e^{bP} = +\infty$ pues $b > 0$, por L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{P}{e^{bP}} &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{be^{bP}} \\ &= \frac{1}{b} \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{bP}} \\ &= \frac{1}{b} \cdot 0 \end{aligned}$$

$$= 0 \quad (*)$$

$$\therefore \lim_{p \rightarrow +\infty} R(p) = a \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{e^{bp}} = a \cdot 0 = 0 \quad \xrightarrow{(*)}$$

Así, $y=0$ es una asíntota horizontal de R .

iii) Monotonía:

Veamos $R'(p)$:

$$\begin{aligned} R'(p) &= (a p e^{-bp})' \\ &= a (p e^{-bp})' \\ &= a (e^{-bp} - b p e^{-bp}) \quad | \text{aquí usamos la regla de derivación del producto.} \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} R'(p) = 0 &\Leftrightarrow a (e^{-bp} - b p e^{-bp}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a e^{-bp} (1 - bp) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - bp = 0 \quad \text{pues } a > 0, e^{-bp} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 = bp \\ &\Leftrightarrow 1/b = p \end{aligned}$$

Así, $1/b$ es un posible máximo o mínimo.
Veamos el signo de $R'(p) = a e^{-bp} (1 - bp)$

	$(0, 1/b)$	$1/b$	$(1/b, +\infty)$
$a e^{-bp}$	+	+	+
$(1 - bp)$	+	0	-
$R'(p)$	+	0	-

Esto nos dice que R es creciente en $(0, 1/b)$ y decreciente en $(1/b, +\infty)$, luego, $1/b$ es un máximo.

iv) Concavidad:

Veamos $R''(P)$:

$$\begin{aligned}
 R''(P) &= (R'(P))' \\
 &= (a(e^{-bP} - bPe^{-bP}))' \\
 &= a(e^{-bP} - bPe^{-bP})' \quad / \text{ derivamos la resta} \\
 &= a(-be^{-bP} - b(Pe^{-bP})') \\
 &= a(-be^{-bP} - b(e^{-bP} - bPe^{-bP})) \\
 &= a(-be^{-bP} - be^{-bP} + b^2Pe^{-bP}) \\
 &= a(b^2Pe^{-bP} - 2be^{-bP})
 \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
 R''(P) = 0 &\Leftrightarrow a(b^2Pe^{-bP} - 2be^{-bP}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow ab(bPe^{-bP} - 2e^{-bP}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow abe^{-bP}(bP - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (bP - 2) = 0 \quad \text{pues } a > 0, b > 0, e^{-bP} > 0 \\
 &\Leftrightarrow bP = 2 \\
 &\Leftrightarrow P = 2/b
 \end{aligned}$$

Así, $2/b$ es un posible punto de inflexión.
 Veamos el signo de $R''(P) = abe^{-bP}(bP - 2)$

	$(0, 2/b)$	$2/b$	$(2/b, +\infty)$
abe^{-bP}	+	+	+
$(bP - 2)$	-	0	+
$R''(P)$	-		+
	$\cap$		$\cup$

Esto nos dice que R es cóncava en $(0, 2/b)$ y convexa en $(2/b, +\infty)$
Como hay cambio de signo, $2/b$ es pto de inflexión

o) gráfico:

* Puntos importantes: $(0, 0)$
 $1/b$
 $2/b$

Desquemos $R(1/b)$ y $R(2/b)$:

$$\bullet R(1/b) = a\left(\frac{1}{b}\right)e^{-b(1/b)}$$

$$= \frac{a}{b} e^{-1}$$

$$= \frac{a}{be^1} \quad y \quad e^1 \approx 2.72 \Rightarrow R\left(\frac{1}{b}\right) \approx 0.37 \frac{a}{b}$$

$$\bullet R(2/b) = a\left(\frac{2}{b}\right)e^{-b(2/b)}$$

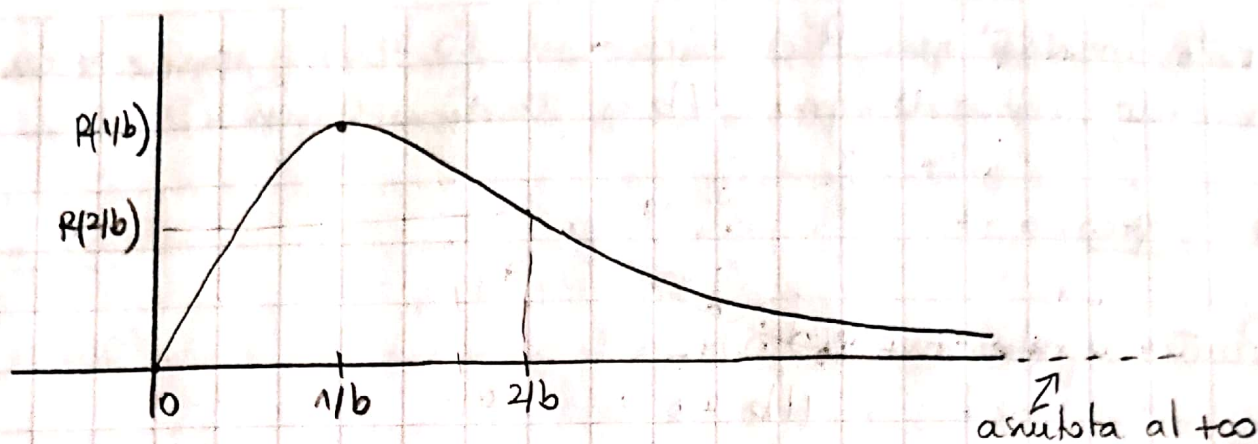
$$= \frac{2a}{b} e^{-2}$$

$$= \frac{2a}{be^2}$$

$$\approx 0.27 \frac{a}{b}$$

y $R(1/b) > R(2/b)$ pues $1/b$ es máximo, además, $1 < 2 \mid \cdot b^{-1}$ y $b > 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{2}{b}$ donde $2/b$ es el doble de $1/b$

Así:



Note que hay un máximo de reclutamiento y aunque el stock sea muy grande, siempre hay reclutamiento. Además, $P=0$ es mínimo.

b) Determine el tamaño de la población deseante para el cual el reclutamiento es máximo.

Sol: Por a), el valor máximo de R se alcanza en $P=1/b$, de hecho, $P''(1/b) = a(b^2 \cdot \frac{1}{b} e^{-b \cdot 1/b} - 2b e^{-b \cdot 1/b}) = a(b e^{-1} - 2b e^{-1}) = -\frac{2ab}{e^1} < 0$ pues $a > 0$, $b > 0$ y $e^1 > 0$, lo que es consistente con que $1/b$ es máximo.

c) Determine el tamaño de la población deseante P para el cual la tasa de reclutamiento, $R'(P)$, es máxima y para la cual es mínima.

Sol: Ahora analizamos $R'(P)$. Por a),

$$R''(P) = a(b^2 P e^{-bP} - 2b e^{-bP})$$

y también por a), sabemos que $R''(P) = 0$ si $P = 2/b$

Para ver si $P = 2/b$ es máximo o mínimo de $R'(P)$, debemos analizar el signo de $R'''(2/b)$.

$$\begin{aligned}
 R'''(P) &= (R''(P))' \\
 &= (a(b^2 P e^{-bP} - 2b e^{-bP}))' \\
 &= a(b^2 P e^{-bP} - 2b e^{-bP})' \\
 &= a(b^2 (P e^{-bP})' - 2b (e^{-bP})') \\
 &= a(b^2 (e^{-bP} - b P e^{-bP}) - 2b (-b e^{-bP})) \\
 &= a(b^2 e^{-bP} - b^3 P e^{-bP} + 2b^2 e^{-bP}) \\
 &= a(3b^2 e^{-bP} - b^3 P e^{-bP}) \\
 &= ab^2 e^{-bP} (3 - bP)
 \end{aligned}$$

$$\text{luego } R'''(2b) = ab^2 e^{-b(2b)} (3 - \cancel{b} \frac{2}{\cancel{b}})$$

$$= ab^2 e^{-2} (3 - 2)$$

$$= ab^2 e^{-2} > 0 \text{ pues } a > 0, b^2 > 0, e^{-2} > 0$$

$$\therefore R'''(2b) > 0$$

$\Rightarrow 2b$ es mínimo para $R'(P)$

$\therefore P = 2b$ es el tamaño de la población desovante para el cual la tasa de reclutamiento, $R'(P)$ es mínima.

Para el máximo, este no existe, puesto que $\lim_{P \rightarrow +\infty} R'(P) = 0$ si $P \rightarrow +\infty$ y aunque $R'(0) = a > 0$, 0 no puede ser máximo pues es un punto en la frontera del dominio y la derivada ahí no existe.

P4) Según la ley de enfriamiento o calentamiento de Newton, la t° de un objeto T después de t minutos de haber sido dejado en un medio ambiente con t° constante T_a está dada por la función

$$T(t) = T_a - M e^{kt}$$

a) Demuestre que en cualquier instante t la razón de cambio de la T° del objeto c/r al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la T° ambiente y la T° del objeto. ¿Cuál es el signo de la constante k ?

Sol: Dos cantidades a y b son directamente proporcionales si hay una constante distinta de cero tal que:

$$\frac{b}{a} = C$$

donde C se conoce como constante de proporcionalidad.

La razón de cambio de la T° del objeto c/r al tiempo es $T'(t)$, nos piden analizar

$$\frac{T'(t)}{T_a - T(t)} \quad \text{y } t \text{ es cualquier instante de tiempo}$$

donde 1) $T'(t) = (T_a - Me^{kt})'$
 $= -Mke^{kt}$ / aquí T_a es constante, no depende de T

2) $T_a - T(t) = T_a - (T_a - Me^{kt})$
 $= Me^{kt}$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T_a - T(t)} = \frac{-Mke^{kt}}{Me^{kt}} = -k$$

y $-k$ es constante.

$\therefore$ La razón de cambio de la T° del objeto c/r al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre la T° ambiente y la T° del objeto.

De lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -k(T_a - T(t)) \\ &= k(T(t) - T_a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T'(t) = k(T(t) - T_a) \quad (*)$$

Ahora, sabemos que, cuando un objeto con temperatura $T(t)$ se pone en contacto con un ambiente que tiene una temperatura diferente T_a ocurre un proceso de transferencia de calor (aquí t es un instante de tiempo).

Así:

- 1) Si $T(t) > T_a$ el objeto se enfría
- 2) Si $T(t) < T_a$ el objeto se calienta

Luego, si estamos en la situación 1, $T(t) - T_a > 0$ y $T'(t)$, que es la razón de cambio de la t° del objeto, es negativa, pues el objeto se ha enfriado, o sea, su temperatura ha variado negativamente (decrece dt al tiempo)

$$\Rightarrow k = \frac{T'(t)}{T(t) - T_a} < 0$$

$\therefore$ Si estamos en el caso 1), $k < 0$

Por otro lado, si estamos en la situación 2, $T(t) - T_a < 0$ y $T'(t)$ es positiva, pues el objeto se ha calentado, o sea, su temperatura ha variado positivamente (aumenta dt al tiempo)

$$\Rightarrow k = \frac{T'(t)}{T(t) - T_a} < 0$$

Concretamente, sea enfriamiento o calentamiento, (*) tiene sentido siempre y cuando $K < 0$.

b) Una bebida, cuya temperatura es 3°C , se saca de un refrigerador y se deja en una sala en donde la temperatura ambiente es constante igual a 30°C . Si la t° de la bebida al cabo de 20 minutos es de 12°C , determine el tiempo que se debe esperar desde que fue sacada del refrigerador para que su t° suba a 15°C .

Sol. Sabemos que $T(t) = T_a - Me^{kt}$ modela la t° después de t minutos de un objeto que ha sido dejado en un ambiente con t° constante T_a .

Por el enunciado, se tiene que:

i) $T_a = 30$

ii) $T(0) = 3$

iii) $T(20) = 12$

Nos piden hallar t para que $T(t) = 15$

De la ecuación, esto es equivalente a:

$$15 = 30 - Me^{kt}$$

$$\Leftrightarrow Me^{kt} = 30 - 15$$

$$\Leftrightarrow Me^{kt} = 15$$

$$\Leftrightarrow e^{kt} = \frac{15}{M} \quad (*)$$

y nos gustaría aplicar $\ln$ a ambos lados para despejar t , pero solo podemos hacerlo si $M > 0$. Lo anterior tiene sentido que ocurra, pues estaríamos diciendo que la exponencial de kt es positiva lo que sabemos que debe ser así.

$$(e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

Así, aplicando $\ln(\cdot)$ a ambos lados de (*):

$$\ln(e^{kt}) = \ln\left(\frac{15}{M}\right)$$

$$\Leftrightarrow kt = \ln(15) - \ln(M)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(15) - \ln(M)}{k} \quad (**)$$

Finalmente, para obtener el t buscado debemos saber los valores de M y k que están asociados a este modelo.

Como $T(0) = 3$, usando la ecuación nos queda que:

$$3 = 30 - M e^{k \cdot 0}$$

$$\Rightarrow M \cdot 1 = 30 - 3$$

$$\Rightarrow M = 27 > 0$$

$$\text{Así, } T(t) = 30 - 27e^{kt}$$

Para hallar k , sabemos que $T(20) = 12$

$$\Rightarrow 12 = 30 - 27e^{20k}$$

$$\Rightarrow 27e^{20k} = 30 - 12 = 18$$

$$\Rightarrow e^{20k} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow e^{20k} = \frac{2}{3} \quad | \ln(\cdot)$$

$$\Rightarrow \ln(e^{20k}) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\{\ln(1) = 0\}$$

$$\Rightarrow 20k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(2/3)}{20} \quad \text{y} \quad 2/3 < 1 \Rightarrow \ln(2/3) < \ln(1) \quad / \ln(\cdot) \text{ es creciente}$$

$$\Rightarrow \ln(2/3) < 0$$

luego, $k < 0$ lo que es consistente con el análisis hecho en a)

Reemplazando en el t obtenido en (**):

$$t = \frac{\ln(15) - \ln(27)}{\frac{\ln(2/3)}{20}}$$

$$\Leftrightarrow t = 20 \left(\frac{\ln(5 \cdot 3) - \ln(9 \cdot 3)}{\ln(2/3)} \right)$$

$$\Leftrightarrow t = 20 \left(\frac{\ln(5) + \ln(3) - \ln(9) - \ln(3)}{\ln(2/3)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t = 20 \left(\frac{\ln(5/9)}{\ln(2/3)} \right)}$$

y note que $5/9 < 1 \Rightarrow \ln(5/9) < 0$
 $2/3 < 1 \Rightarrow \ln(2/3) < 0$

$$\Rightarrow t > 0 \quad (\text{pues es una medida de tiempo})$$

Otra prueba:

$$\text{Por a), } T'(t) - k(T(t) - T_a) = k(T(t) - 30) \Rightarrow \frac{T'(t)}{(T(t) - 30)} = k \quad (\heartsuit)$$

luego, considere $\int_0^{20} \frac{T'(t)}{(T(t) - 30)} dt$ y

tomando $F(t) = \ln(|T(t) - 30|)$ se tiene que F es una primitiva de $f(t) = \frac{T'(t)}{(T(t) - 30)}$ pues, si consideramos el caso general con $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $\ln(|u|)' =$

$$\begin{cases} \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u} & \text{si } u > 0 \\ -\frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u} & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Así, por TFC:

$$\begin{aligned} \int_0^{20} \frac{T'(t) dt}{(T(t) - 30)} &= \ln(|T(t) - 30|) \Big|_0^{20} \\ &= \ln(|T(20) - 30|) - \ln(|T(0) - 30|) \\ &= \ln(|12 - 30|) - \ln(|3 - 30|) \\ &= \ln(18) - \ln(27) \\ &= \ln\left(\frac{18}{27}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Por $(\heartsuit)$,

$$\int_0^{20} \frac{T'(t)}{(T(t) - 30)} dt = \int_0^{20} k dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{20} k dt = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k \int_0^{20} dt = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k \left(t \Big|_0^{20} \right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k(20-0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{20} \quad \text{que es el mismo que nos dio con el método anterior}$$

Para obtener M lo hacemos análogo a la forma anterior.

• OBS: Integramos en $[0, 20]$ pues en $t=0$ y $t=20$ sabemos valores de $T(t)$