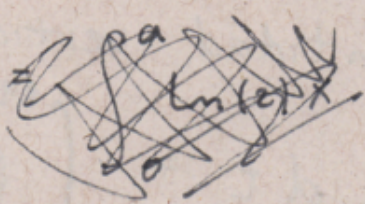


P1 EL área se evalúa como  $\int_0^a f(x) dx$ .

$$\text{Area}(a) = \int_0^a \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} dx$$


hacemos la sustitución  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$  y  
notamos que podemos escribir la integral como:

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \ln(2) \cdot 2x \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=a} \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^u du$$

cambiamos los límites de integración:

$$x=0 \rightarrow u=0$$

$$x=a \rightarrow u=a^2$$

y por lo tanto, la integral  
queda en términos de  $u$ :

$$= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^u du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \ln(2) e^{-u \ln(2)} du$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^u = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^u\right)} = e^{u \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$= e^{u \ln(2^{-1})} = e^{-u \ln(2)}$$
$$= e^{-u \ln(2)}$$

Sustitución:

$$V = -u \ln(2) \rightarrow dV = -\ln(2) du$$

$$u=0 \rightarrow V=0 \quad \bigg| \quad u=a^2 \rightarrow V=-a^2 \ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{-a^2 \ln(2)} e^V dV = -\frac{1}{2} e^V \bigg|_0^{-a^2 \ln(2)} = -\frac{1}{2} (e^{-a^2 \ln(2)} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2 \ln(2)})$$

nota: cuando  $a \rightarrow \infty$ ,  $e^{-a^2 \ln(2)} \rightarrow 0$   
y por lo tanto, el área tiende  
a  $\frac{1}{2}$ .  $\square$ .



P2  $r(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}}$   $t \in [0, 19]$

a) La cantidad vertida viene dada por:

$$\int_0^{19} \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}} dt = \int_0^{19} (t+8)^{-\frac{2}{3}} dt \quad \left| \begin{array}{l} u = t+8 \quad du = dt \\ t=0 \rightarrow u=8 \\ t=19 \rightarrow u=27 \end{array} \right.$$

$$= \int_8^{27} u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_8^{27} = 3 \left( \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} \right) = 3(3-2) = 3.$$

o.o se habrán vertido 3 Litros.

b) El promedio se evalúa como:  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

En este caso:  $\frac{1}{19-0} \int_0^{19} r(t) dt = \frac{3}{19}$   
 $\rightarrow$  ya hicimos esto!

Para encontrar el instante, resolvemos la ecuación

$$r(t) = \frac{3}{19} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{(t+8)^2}} = \frac{3}{19} \Leftrightarrow \frac{1}{(t+8)^2} = \left(\frac{3}{19}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (t+8)^2 = \frac{19^3}{27} \Leftrightarrow t+8 = \sqrt{\frac{19^3}{27}} \rightarrow \boxed{t^* = \sqrt{\frac{19^3}{27}} - 8}$$



P3  $R(p) = a p e^{-bp} \quad (p \geq 0)$  → Único zero!

a) ceros  $R(p) = 0 \Leftrightarrow a p e^{-bp} = 0 \Rightarrow \boxed{p=0}$

Asíntotas verticales: no existen ya que no hay candidatos

Asíntotas horizontales:  $\lim_{p \rightarrow \infty} a p e^{-bp} = a \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{e^{bp}}$

$\stackrel{L'H}{=} a \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{b e^{-bp}} = -\frac{a}{b} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-bp}} = a \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{e^{bp}}$

$\stackrel{L'H}{=} a \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{b e^{bp}} = \frac{a}{b} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{bp}} = 0$  positivo decreciente

$R'(p) = a(1e^{-bp} + p b e^{-bp}) = a e^{-bp} (1 + pb)$

nota:  $R'(p) = 0$  cuando  $p = -\frac{1}{b}$

$R''(p) = a(-b e^{-bp} - b(e^{-bp} - b p e^{-bp})) = a(-b e^{-bp} - b e^{-bp} + b^2 p e^{-bp})$  ∴  $p = \frac{1}{b}$  entrega um máximo.

$= a(b^2 p e^{-bp} - 2b e^{-bp}) = \underbrace{ba e^{-bp}}_{\text{positivo}} \underbrace{(bp - 2)}_{\text{crescente.}}$

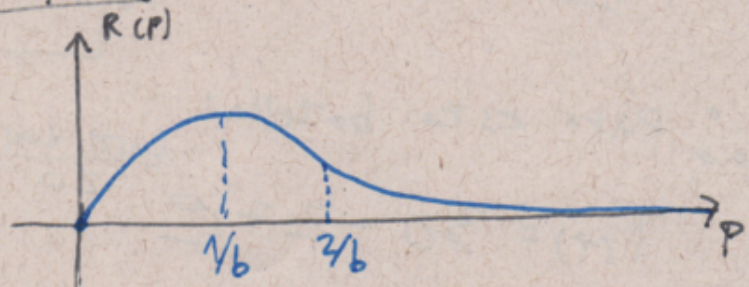
nota:  $R''(p) = 0$  cuando  $p = \frac{2}{b}$

Resumen:

|       |   |               |               |          |
|-------|---|---------------|---------------|----------|
|       | 0 | $\frac{1}{b}$ | $\frac{2}{b}$ | $\infty$ |
| $R'$  | + | 0             | -             | -        |
| $R''$ | - | -             | 0             | +        |
| $R$   | ∩ | ∩             | ∩             | ∩        |

|       |   |               |               |          |
|-------|---|---------------|---------------|----------|
|       | 0 | $\frac{1}{b}$ | $\frac{2}{b}$ | $\infty$ |
| $R''$ | - | +             | 0             | +        |
| $R$   | ∩ | ∪             | ∩             | ∩        |

Gráfico:





b) notamos que  $R(p)$  es máximo para  $p = \frac{1}{6}$

c) El único punto de inflexión (punto crítico para  $R'$ ) se obtiene en  $R = \frac{2}{6}$ . y analizando el signo de  $R''$ , deducimos que es mínimo para  $R'$ .

El máximo, sin embargo no existe puesto que  $R'$  será mayor cuanto más cercano a 0 sea  $P$ . Pero como 0 es un punto en la frontera del dominio de  $R$ , la derivada no existe ahí.

P4) a)  $T(t) = T_a - Me^{kt} \rightarrow T(t) - T_a = -Me^{kt}$   
 $\rightarrow T'(t) = -Mk e^{kt}$

por lo tanto:  $\frac{T'(t)}{T(t) - T_a} = \frac{-Mk e^{kt}}{-M e^{kt}} = k$   ~~$k$  debe ser positivo~~

$\Leftrightarrow T'(t) = k(T(t) - T_a) \therefore k$  debe ser negativo  
 $P. q. T(t) > T_a \Rightarrow T'(t) < 0$

b) condiciones:

$T(0) = 3 \quad | \quad T(20) = 12$   
 $3 = 30 - M \cdot e^0 \rightarrow M = 27$   
 $12 = 30 - 27e^{k \cdot 20} \Rightarrow 27e^{20k} = 18$   
 $\Rightarrow e^{20k} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 20k = \ln(2) - \ln(3)$   
 $\Rightarrow k = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{20}$

∴ Para esta botella:

$T(t) = 30 - 27e^{\frac{\ln(2) - \ln(3)}{20} t}$



busco  $t$  para que  $T(t) = 15$ .

$$15 = 30 - 27 e^{\frac{\ln(2) - \ln(3)}{20} t}$$

$$\Leftrightarrow 27 e^{\frac{\ln(2) - \ln(3)}{20} t} = 15 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(2) - \ln(3)}{20} t} = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2) - \ln(3)}{20} t = \ln(5) - \ln(9) = \ln(5) - 2\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{20 (\ln(5) - 2 \ln(3))}{\ln(2) - \ln(3)}$$