

Ayudantía 8 (24/09/2019)

P1) a) Determine el conjunto de los números reales x para los cuales $h(x) = \ln(\sec(x) + \tan(x))$ es un número real y calcule $h'(x)$.

Sol: Sabemos que $\ln(\cdot)$ está bien definido $\forall x > 0$, luego, para que $h(x) \in \mathbb{R}$ debe ocurrir que

$$\sec(x) + \tan(x) > 0$$

$$\text{y } \sec(x) + \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$$

Así, buscamos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)} > 0$$

Note que, como $\sin(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(x) + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Con esto, debemos descartar el caso $\sin(x) + 1 = 0$

De lo anterior, los $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)} > 0$ son aquellos cuando $\cos(x) > 0$ y cuando $\sin(x) + 1 \neq 0$.

- $\sin(x) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \neq -1$
 $\Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - $\cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$
- $\therefore \text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$

Ahora derivamos h (sobre el conjunto donde está bien definida)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\ln(\sec(x) + \tan(x)))' \\ &= \ln'(\sec(x) + \tan(x)) \cdot (\sec(x) + \tan(x))' \quad / \text{regla de la cadena} \\ &= \frac{1}{\sec(x) + \tan(x)} \cdot \left(\frac{\sec(x)}{\cos^2(x)} + \sec^2(x) \right) \\ &= \frac{1}{\sec(x) + \tan(x)} \cdot (\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)) \\ &= \frac{1}{\cancel{\sec(x)} + \cancel{\tan(x)}} \cdot (\sec(x)(\cancel{\tan(x)} + \sec(x))) \\ &= \sec(x) \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = \sec(x) //$$

b) Determine el conjunto de los n° reales x para los cuales $g(x) = x(x-1)^{2/3} \sqrt{x+1}$ es un n° real y calcule su 1^{ra} derivada usando derivación logarítmica.

$$\begin{aligned} \text{Sol: } g(x) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x+1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$$

Para aplicar derivación logarítmica, debe tenerse que $g(x) > 0$ lo que ocurre si $x > 1$ (donde g sigue estando bien definida)

Así, aplicando logaritmo natural a ambos lados, con $x > 1$:

$$\ln g(x) = \ln \left(x \frac{(x-1)^{2/3}}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \ln g(x) &= \ln(x(x-1)^{2/3}) - \ln(\sqrt{x+1}) \\
 &= \ln(x) + \ln((x-1)^{2/3}) - \ln((x+1)^{1/2}) \\
 &= \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) \quad (*)
 \end{aligned}$$

en donde hemos usado propiedades del logaritmo natural tales como:

$$① \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$② \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$③ \ln(x^a) = a \ln(x)$$

$$\forall x, y > 0, a \in \mathbb{R}$$

De (*), se tiene que:

$$\ln g(x) = \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

El siguiente paso es derivar a ambos lados:

$$\ln'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = g(x) \cdot \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right\}$$

$$y \quad g(x) = \frac{x(x-1)^{2/3}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{x(x-1)^{2/3}}{\sqrt{x+1}} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right\}$$

P2] Si un medicamento se inyecta en la corriente sanguínea, su concentración t minutos después se modela mediante

$$C(t) = \frac{k}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}), \quad t \geq 0$$

donde a, b, k son positivas y $a < b$.

a) Demuestra que la concentración es máxima cuando

$$t = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = M.$$

Sol: Derivamos $C(t)$:

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{k}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})' \\ &= \frac{k}{b-a} (-ae^{-at} + be^{-bt}) \end{aligned}$$

$$\text{luego } C'(t) = 0 \Leftrightarrow -ae^{-at} + be^{-bt} = 0 \quad / \quad k > 0$$

$$\Leftrightarrow be^{-bt} = ae^{-at}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{e^{-at}}{e^{-bt}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = e^{-at} \cdot e^{bt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = e^{(b-a)t} \quad / \quad \ln(\cdot) \text{ a ambos lados (se puede pues } \frac{b}{a} > 0 \text{ y } e^{(b-a)t} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(e^{(b-a)t})$$

$$\Leftrightarrow \ln(b) - \ln(a) = (b-a)t \quad / \quad \text{pues } e^x \text{ es la inversa de } \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = t$$

Luego, si calculamos $C''(t)$:

$$\begin{aligned} C''(t) &= \frac{k}{b-a} (-ae^{-at} + be^{-bt})' \\ &= \frac{k}{b-a} (-b^2e^{-bt} + a^2e^{-at}) \\ &= \frac{k}{b-a} e^{-bt} (-b^2 + a^2e^{(b-a)t}) \end{aligned}$$

y evaluamos en $M = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}$

$$\begin{aligned} C''(M) &= \frac{ke^{-bM}}{b-a} (-b^2 + a^2e^{\ln(b) - \ln(a)}) \\ &= \frac{ke^{-bM}}{b-a} (-b^2 + a^2e^{\ln(\frac{b}{a})}) \\ &= \frac{ke^{-bM}}{b-a} (-b^2 + a^2(\frac{b}{a})) \\ &= \frac{ke^{-bM}}{b-a} (-b^2 + ab) \\ &= \frac{ke^{-bM}}{b-a} (b(a-b)) \end{aligned}$$

donde $\frac{ke^{-bM}}{b-a} > 0$, $b > 0$ y $a-b < 0$

$\Rightarrow C''(M) < 0$ luego M es un máximo

∴ La concentración es máxima en $t = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = M$

b) Demuestra que C tiene un único pto de inflexión, que corresponde a $t = 2M$ (aquí supera a disminuir el efecto de la droga)

Sol: Para esto, busquemos los $t \geq 0$ tal que $C''(t) = 0$

$$\text{De a), } C'(t) = \frac{k}{b-a} (a^2 e^{-at} - b^2 e^{-bt})$$

$$\text{luego } C''(t) = 0 \Leftrightarrow a^2 e^{-at} - b^2 e^{-bt} = 0 \quad / \text{ pues } k > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 e^{-at} = b^2 e^{-bt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{e^{-bt}}{e^{-at}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = e^{-bt} \cdot e^{at}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = e^{(a-b)t} \quad / \ln(\cdot) \text{ a ambos lados (se puede pues } \frac{a^2}{b^2} > 0 \text{ y } e^{(a-b)t} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right) = \ln(e^{(a-b)t})$$

$$\Leftrightarrow \ln(a^2) - \ln(b^2) = (a-b)t$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(a) - 2\ln(b) = (a-b)t$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\ln(a) - \ln(b))}{a-b} = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\ln(b) - \ln(a))}{b-a} = t$$

$$\text{donde } \frac{2(\ln(b) - \ln(a))}{b-a} = 2M$$

∴ C tiene un único punto de inflexión en $t = 2M$ //

P3) Grafique $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln(x)$. Debe indicar, si es que existen: intersección con los ejes, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de monotonicidad, extremos locales y absolutos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Sol: Tenemos que $f(x) = x^2 \ln(x)$

i) Intersección con los ejes:

Caso $0 \notin \text{dom}(f) \Rightarrow f$ no intersecciona al eje OY .

$$\begin{aligned} \text{Ahora, } f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

pero $0 \notin \text{dom}(f)$ luego $(1, 0)$ intersecciona al eje OX .

ii) Asíntotas:

Recuerde que $\ln(x)$ está definido para $x > 0$. El único punto que podemos analizar es $x = 0$, así

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x^2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2}$$

$$= 0$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

y no tiene sentido analizar $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ pues $\ln(x)$ no está definido para $x < 0$.

Así, f no tiene asíntotas verticales.

Ahora, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(x) = +\infty$ pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty$.

$\therefore f$ no tiene asíntotas horizontales.

iii) Monotonía y extremos:

Veamos f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \ln(x))' \\ &= 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \\ &= x(2 \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{luego } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x(2 \ln(x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln(x) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln(x) = -1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = -1/2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-1/2} \end{aligned}$$

Así, los posibles máximos o mínimos de f son 0 y $e^{-1/2}$, pero $0 \notin \text{dom}(f)$, luego solo $e^{-1/2}$ es un candidato a máx o mín de f .

Analizamos el signo de f' : ($e^{-1/2} \approx 0,6$)

	0	$(0, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, +\infty)$
x	0	+	+	+
$2\ln x + 1$	ND	-	0	+
$f'(x)$	ND	-	0	+

$\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(e^{-1/2}, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, e^{-1/2})$

Finalmente, $e^{-1/2}$ es un mínimo absoluto

10) Concavidad y puntos de inflexión:

Veamos f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \ln(x) + x)' \\ &= 2 \ln x + \frac{2x}{x} + 1 \\ &= 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \ln x = -3 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -3/2 \quad | \cdot e^{(\cdot)} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-3/2} \approx 0,22 \end{aligned}$$

luego $e^{-3/2}$ es un posible pto de inflexión

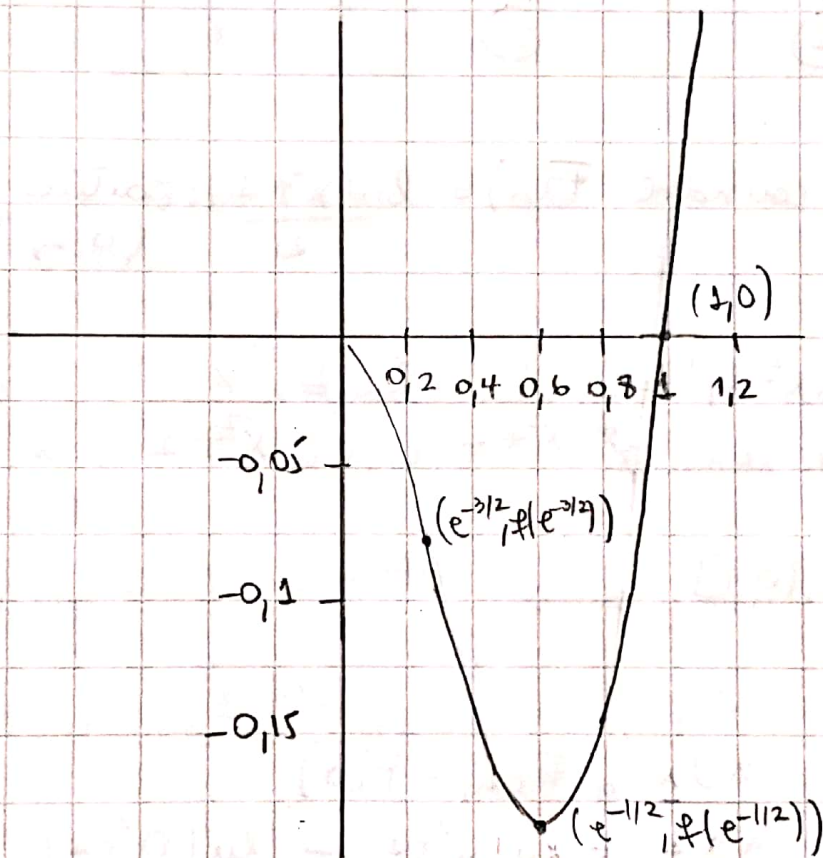
Veamos signo de f'' .

	$(0, e^{-3/2})$	$e^{-3/2}$	$(e^{-3/2}, +\infty)$
$2 \ln x + 3$	-	0	+
f''	$\cap$		$\cup$

$\Rightarrow f$ es cóncava en $(0, e^{-3/2})$ y convexa en $(e^{-3/2}, +\infty)$
 Así, $e^{-3/2}$ es un pto de inflexión

a) gráfico:

Puntos clave: $e^{-1/2} \approx 0,6 \Rightarrow f(e^{-1/2}) \approx -0,183$
 $e^{-3/2} \approx 0,22 \Rightarrow f(e^{-3/2}) \approx -0,075$



P4) Calcule el promedio de $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 3x \cdot 2^{x^2}$ sobre $[0,1]$

Sol: No pden:

$$\frac{\int_0^1 f(x) dx}{1-0} = \int_0^1 f(x) dx$$

Q15

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} + 3x \cdot 2^{x^2} \right) dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}}_{(1)} + \underbrace{\int_0^1 3x \cdot 2^{x^2} dx}_{(2)} \end{aligned}$$

① = $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}$ y considerar $F(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2}$ continua y derivable en $(0,1)$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$$

y $\frac{x}{x^2+1}$ continua en $[0,1]$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Por TFC: } \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{\ln(1^2+1)}{2} - \frac{\ln(0^2+1)}{2} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(1)}{2} \quad / \text{ pues } \ln(1)=0 \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} = \int_0^1 3x \cdot 2^{x^2} dx$$

Recuerde que $a^x = e^{\ln(a)x}$, $a > 0$

$$\Rightarrow 2x^2 = e^{\ln(2)x^2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (2) &= \int_0^1 3x \cdot e^{\ln(2) \cdot x^2} dx \\&= 3 \int_0^1 x e^{\ln(2)x^2} dx \\&= \frac{3}{2} \int_0^1 2x e^{\ln(2)x^2} dx \\&= \frac{3}{2\ln(2)} \int_0^1 2\ln(2)x e^{\ln(2)x^2} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y (e^{\ln(2)x^2})' &= e^{\ln(2)x^2} \cdot (\ln(2) \cdot x^2)' \\&= e^{\ln(2)x^2} \cdot 2\ln(2)x \quad / \text{ derivada de } e^x \text{ es } e^x\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ por TFC, con $F(x) = e^{\ln(2)x^2}$ continua, derivable en $(0,1)$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2\ln(2)} \int_0^1 2\ln(2)x e^{\ln(2)x^2} dx &= \frac{3}{2\ln(2)} \left(e^{\ln(2)x^2} \Big|_0^1 \right) \\&= \frac{3}{2\ln(2)} \left(2x^2 \Big|_0^1 \right) \quad / \text{ por } (*) \\&= \frac{3}{2\ln(2)} (2^1 - 2^0) \\&= \frac{3}{2\ln(2)} (2 - 1) \\&= \frac{3}{2\ln(2)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = (1) + (2) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{3}{2\ln(2)} \quad \text{que es el resultado pedido}$$