

Ayudantía 6 (05/09/2019)

P11 Calcule:

a) $\int 4x^5 - 2x^{2/3} + 10 dx$.

Sol: Desarrollando:

$$\begin{aligned}\int (4x^5 - 2x^{2/3} + 10) dx &= \int 4x^5 dx - \int 2x^{2/3} dx + \int 10 dx \quad | \int \text{separa la } + y - \\ &= 4 \int x^5 dx - 2 \int x^{2/3} dx + 10 \int dx \quad | \text{podemos sacar las constantes}\end{aligned}$$

Recordemos que:

1) $\int f(x) dx = F(x) + C$ con $F'(x) = f(x)$, C constante.

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C$, $\forall n \neq -1$, C de

siguiendo con la igualdad:

$$= 4 \left\{ \frac{x^{5+1}}{(5+1)} + C_1 \right\} - 2 \left\{ \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{(\frac{2}{3}+1)} + C_2 \right\} + 10 \{ x + C_3 \}$$

donde usamos 1) y 2), con C_1, C_2 y C_3 constantes.

$$= 4 \left(\frac{x^6}{6} + C_1 \right) - 2 \left(\frac{x^{5/3}}{5/3} + C_2 \right) + 10x + 10C_3$$

$$= \frac{2x^6}{3} + 4C_1 - \frac{6x^{5/3}}{5} - 2C_2 + 10x + 10C_3$$

$$= \frac{2x^6}{3} - \frac{6x^{5/3}}{5} + 10x + C \quad \text{con } C = 4C_1 - 2C_2 + 10C_3$$

Así: $\int 4x^5 - 2x^{2/3} + 10 \, dx = \frac{2x^6}{3} - 6\frac{x^{5/3}}{5} + 10x + C //$

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{yx^2 + y^3 \cos(x)}{y^{1/2}} \, dx$, donde y es constante.

Sol: Note que la integral anterior es una integral definida:

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC): Sea f integrable en $[a, b]$. Si existe una función F continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b) entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

* Teorema: Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$

Calculemos la integral:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{yx^2 + y^3 \cos(x)}{y^{1/2}} \, dx = \frac{1}{y^{1/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} yx^2 + y^3 \cos(x) \, dx \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{y^{1/2}} \text{ sac} \\ \text{por es constante} \end{array} \right.$$

la integral $\rightarrow$ separa la suma

$$= \frac{1}{y^{1/2}} \left\{ \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} yx^2 \, dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^3 \cos(x) \, dx}_{(2)} \right\}$$

Calculemos (1) y (2):

$$\textcircled{1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y x^2 dx = y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx \quad | \text{ y sale pues es constante}$$

Notemos que $f(x) = x^2$ es integrable en $[-\pi/2, \pi/2]$ pues es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[-\pi/2, \pi/2]$.

Por otro lado, sea $F(x) = \frac{x^3}{3}$ continua en $\mathbb{R}$ (también derivable) tal que:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cancel{3} x^2 = x^2 = f(x)$$

Con esto, por TFC:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx &= F(\pi/2) - F(-\pi/2) \\ &= \left(\frac{\pi/2}{3}\right)^3 - \left(\frac{-\pi/2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} \\ &= \frac{\pi^3}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} = y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx = y \left(\frac{\pi^3}{12} \right) = y \frac{\pi^3}{12}$$

$$\textcircled{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^3 \cos(x) dx = y^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx \quad | \text{ y}^3 \text{ sale pues es constante}$$

Sea $f(x) = \cos(x)$ integrable en $[-\pi/2, \pi/2]$ (es continua en todo $\mathbb{R}$) y considere $F(x) = \sin(x)$ continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$F'(x) = (\sin(x))' = \cos(x) = f(x)$$

Con esto, por TFC:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx &= F(\pi/2) - F(-\pi/2) \\ &= \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(-\pi/2) \\ &= 1 + \operatorname{sen}(\pi/2) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} = y^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = y^3(2) = 2y^3.$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{yx^2 + y^3 \cos(x)}{y^{5/2}} dx &= \frac{1}{y^{5/2}} \left\{ \frac{y\pi^3}{12} + 2y^3 \right\} \\ &= \frac{y^{1/2}\pi^3}{12} + 2y^{5/2} \quad //\end{aligned}$$

P21 Para la función $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, donde $-1 < x < 1$, determine la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(1) = 2\pi$.

Sol: Sabemos que F es una primitiva de f si $F'(x) = f(x)$. Además:

1) Sean F_1, F_2 dos primitivas de f entonces:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \wedge \quad F_2'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow (F_1(x) - F_2(x))' = 0$$

$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \text{constante}$$

O sea, dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante.

2) Si F es una primitiva de f entonces $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante cualquiera, es otra primitiva de f .

* El conjunto de todas las primitivas de f se anotará como $\int f$. Luego, si F es una primitiva de f se tiene que:

$$\int f = F + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

Para este problema, buscamos $F(x) = \int f(x)$ con $F(1) = 2\pi$

Ans:

$$\int f(x) dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

no lo que necesitamos calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sea $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, y considere $x = \sin y$. Derivando dr a x a ambos

lados se tiene que: $1 = \cos(y) \cdot y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x) \quad (*)$$

y como: $x = \sin y \Rightarrow \arcsin x = y$. Reemplazando en (*) se obtiene que:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Así, $\arcsen(x)$ es una primitiva de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*)

Con lo anterior:

$$\int f(x) dx = 2 \int g(x) dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{(*)}{=} 2 (\arcsen(x) + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(x) = 2 \arcsen(x) + 2C$$

$$\text{y nos piden } F(1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi = 2 \arcsen(1) + 2C$$

$$\Rightarrow C = \pi - \arcsen(1)$$

$$\therefore F(x) = 2 \arcsen(x) + \pi - \arcsen(1) //$$

03] La aceleración a , medida en $[m/s^2]$, de una partícula en cualquier instante de tiempo, está dada por:

$$a(t) = 2 \sen(t)$$

donde t está medido en segundos.

Se sabe que $v(0) = 0$ y $x(0) = 0$

a) Determinar su velocidad v en cualquier instante de tiempo.

Sol: Sabemos que $v' = a$. Además, $v(0) = 0$.

Sea t un instante cualquiera de tiempo, luego, por regla de Barrow:

$$\int_0^t a(x) dx = v(t) - v(0)$$

Regla de Barrow: Sea f continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde a es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, t]$.

$$\Rightarrow \int_0^t a(x) dx = v(t) - 0 = v(t) \quad (1)$$

por lo que para encontrar lo pedido debemos obtener $\int_0^t a(x) dx$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t a(x) dx &= \int_0^t 2 \sin(x) dx \\ &= 2 \int_0^t \sin(x) dx \quad (2) \end{aligned}$$

Como $\sin(x)$ es continua y $(-\cos(x))' = \sin(x)$, por regla de Barrow se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(x) dx &= (-\cos(t)) - (-\cos(0)) \\ &= -\cos(t) + 1 \\ &= 1 - \cos(t) \end{aligned}$$

Reemplazando esto en (2):

$$\int_0^t a(x) dx = 2(1 - \cos(t)) = 2 - 2\cos(t)$$

Finalmente, por (1):

$$v(t) = 2 - 2\cos(t) \text{ en [m/s]}$$

b) Determine su posición x en cualquier instante de tiempo.

Sol: Sabemos que $x' = v$ y que $x(0) = 0$.

Sea t un instante cualquiera de tiempo. Como v es continua, por regla de Barrow:

$$\int_0^t v(s) ds = x(t) - x(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^t v'(s) ds = x(t) - 0 = x(t) \quad (3)$$

por lo que para encontrar lo pedido debemos obtener $\int_0^t v'(s) ds$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t v'(s) ds &= \int_0^t (2 - 2 \cos(s)) ds \quad / \text{ donde usamos el resultado de a) } \\ &= \int_0^t 2 ds - \int_0^t 2 \cos(s) ds \\ &= 2 \int_0^t ds - 2 \int_0^t \cos(s) ds \\ &= 2 \left(s \Big|_0^t \right) - 2 \left(\sin(s) \Big|_0^t \right) \quad / \text{ Aquí aplicamos regla de Barrow } (**) \\ &= 2(t - 0) - 2(\sin(t) - \sin(0)) \\ &= 2t - 2\sin(t) \end{aligned}$$

Finalmente, usando lo anterior en (3)

$$x(t) = 2t - 2\sin(t) \text{ en [m]}$$

• OBS: la notación usada en (**) quiere decir lo siguiente:

$$f(x) \Big|_b^a = f(a) - f(b)$$

P4] Halle el área de la región comprendida entre las curvas:
 $y = -x^2 - 2x + 3$, la recta $x = -3$, la recta $x = 1$ y la recta $y = 0$.

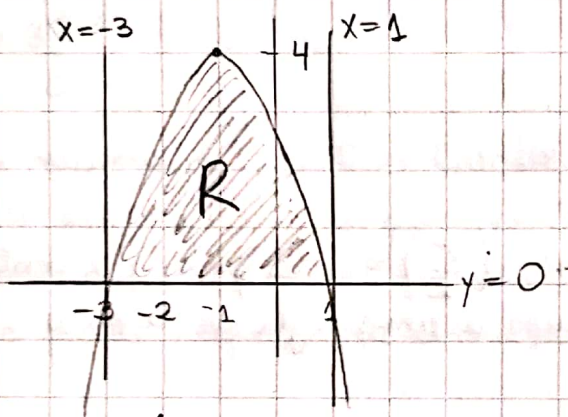
Sol: Vamos a graficar la región. Comenzaremos buscando el gráfico de $y = -x^2 - 2x + 3$:

Sea $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, que es una parábola con $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2(-1)} = -1$
 (triste)

$\Rightarrow$ Su vértice $V = (-1, f(-1)) = (-1, 4)$. Los puntos donde f corta al eje OX son los x tal que:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ los puntos de intersección con el eje OX son $(1, 0)$ y $(-3, 0)$.



donde R es la región a la que queremos calcularle el área.

Para esto, notemos que calcular el área de R es lo mismo que calcular el área bajo la curva $y = -x^2 - 2x + 3$ en $[-3, 1]$, explícitamente:

$$\text{Área}(R) = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$$

Calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx &= \int_{-3}^1 -x^2 dx + \int_{-3}^1 -2x dx + \int_{-3}^1 3 dx \quad / \text{ separa suma} \\ &= \underbrace{-\int_{-3}^1 x^2 dx}_{(1)} - 2 \underbrace{\int_{-3}^1 x dx}_{(2)} + 3 \underbrace{\int_{-3}^1 dx}_{(3)} \quad / \text{ sacamos las constantes} \end{aligned}$$

Calculamos por separado:

$$\textcircled{1} = \int_{-3}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^1 \quad / \text{ pues } \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \left(\frac{3x^2}{3} \right) = x^2 \text{ y } x^2 \text{ continua,}$$

luego usamos regla de Barrow.

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^3 - \left(\frac{-3}{3} \right)^3$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{27}{3}$$

$$= \frac{28}{3}$$

$$\textcircled{2} = \int_{-3}^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-3}^1 \quad / \text{ pues } \left(\frac{x^2}{2} \right)' = \left(\frac{2x}{2} \right) = x \text{ y } x \text{ continua}$$

luego usamos regla de Barrow

$$= \frac{1^2}{2} - \left(\frac{-3}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{2}$$

$$= -\frac{8}{2}$$

$$= -4$$

$$\textcircled{3} = \int_{-3}^1 dx = x \Big|_{-3}^1 \quad / \text{ pues } (x)' = 1 \text{ y } 1 \text{ es continua luego}$$

usamos regla de Barrow

$$= 1 - (-3)$$

$$= 4$$

Sumando todos:

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx &= -\textcircled{1} - 2\textcircled{2} + 3\textcircled{3} \\
 &= -\frac{28}{3} + 8 + 12 \\
 &= -\frac{28}{3} + 20 \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Área}(R) = \frac{32}{3}$$

P51 Sea a un número real positivo. Calcule el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, la recta $y=0$, la recta $x=a$ y la recta $x=-a$.

¿Cuán grande puede llegar a ser el área a medida que a va creciendo?

Sol: De igual forma que en P41, lo que buscamos es el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en $[-a, a]$, $a > 0$

Así: $\text{Área}(R) = \int_{-a}^a \frac{1}{1+x^2} dx$

donde R denota la región.

Calculemos la integral:

$$\int_{-a}^a \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ usaremos que } (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a \frac{1}{1+x^2} dx = (\arctan(x)) \Big|_{-a}^a \quad (\text{por regla de Barrow})$$

Así:

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Área}}(P) &= \arctan(a) - \arctan(-a) \\ &= \arctan(a) + \arctan(a) \quad / \text{ pues } \arctan(x) \text{ es impar.} \\ &= 2\arctan(a)\end{aligned}$$

Para responder la pregunta, buscamos cuanto vale:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \widehat{\text{Área}}(P) \quad \text{si } a \rightarrow +\infty$$

que es lo mismo que: $\lim_{a \rightarrow +\infty} 2\arctan(a)$

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{a \rightarrow +\infty} 2\arctan(a) &= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctan(a) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi\end{aligned}$$

∴ lo más grande que llegará a ser el área de esta región si a va creciendo es π .