Universidad de Chile
Programa de Bachillerato
Matemáticas 2
Segundo semestre de 2019

Taller de ayudantía 6
Integral Definida y Primitivas
04/09/2019

En este taller, calcularemos primitivas de funciones sencillas. También, dada la derivada de una función y su valor en un punto fijo, determinaremos la función; por ejemplo, a partir de la aceleración de un objeto, conociendo su velocidad y posición iniciales, obtendremos su velocidad y su posición en cualquier instante de tiempo (Velocidad y posición instantánea, respectivamente).
Por otro lado, calcularemos integrales definidas aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo. Finalmente, interpretaremos geométricamente la integral definida y aplicaremos sus propiedades para calcular áreas entre curvas.

Objetivos:

- Calcular primitivas de funciones básicas.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular integrales definidas.
- Calcular áreas de regiones sencillas limitadas entre curvas utilizando la integral definida.
- Encontrar la única función f que satisface las condiciones $f'(x) = g(x)$ y $f(x_0) = y_0$.

Ejercicios Propuestos

1. Calcule:

   a) $\displaystyle\int 4x^5 - 2x^{\frac{2}{3}} + 10 \; dx$

   b) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{yx^2 + y^3\cos(x)}{y^{\frac{1}{2}}}\, dx$, donde y es constante.

2. Para la función $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, donde $-1 < x < 1$, determine la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(1) = 2\pi$.

3. La aceleración a, medida en $\left[m/s^2\right]$, de una partícula en cualquier instante de tiempo, está dada por

   $$a(t) = 2\,\mathrm{sen}(t),$$

   donde t está medido en segundos.

   Si se sabe que $v(0) = 0$ y $x(0) = 0$.

a) Determine su velocidad v en cualquier instante de tiempo.

b) Determine su posición x en cualquier instante de tiempo.

Ayuda: Recuerde que $v'(t) = a(t)$ y que $x'(t) = v(t)$

4. Halle el área de la región comprendida entre las curvas: $y = -x^2 - 2x + 3$, la recta $x = -3$, la recta $x = 1$ y la recta $y = 0$.

5. Sea a un número real positivo. Calcule el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, la recta $y = 0$, la recta $x = a$ y la recta $x = -a$ ¿Cuán grande puede llegar a ser el área a medida que a va creciendo?

Ejercicios opcionales

1. Considere la función $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

   a) Grafique la función f.

   b) Calcule $\displaystyle\int_1^4 f(x)dx$.

   b) Mediante el gráfico, observe que existe un número real $c \in]1, 4[$ para el cual se satisface que el área bajo el gráfico de $f(x)$ sobre el intervalo $[1, 4]$ es igual al área del rectángulo de altura $f(c)$ y largo 3.

   c) Determine el valor de c explícitamente.

2. La razón de cambio de la altura de una planta con respecto al tiempo a los t días está dada por la función $h'(t) = \sqrt{t} + t + 1 \ \left[\dfrac{\text{cm}}{\text{día}}\right]$. Determine cuántos centímetros creció la planta entre el primer y cuarto día.

Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay mas allá.