

Ayuda 5 (29/08/2019)

P1 Demuestre la siguiente igualdad, utilizando el principio de inducción:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sol: Note que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^3$ y probar lo pedido es lo mismo que probar que $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1), \forall n \in \mathbb{N}.$

1) Caso base ($n=1$): $\sum_{i=1}^1 (2i-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 = 1^3$ y $1^2(2 \cdot 1^2 - 1) = 1 = 1^3$

$\Rightarrow$ La igualdad se cumple para $n=1$ pues $\sum_{i=1}^1 (2i-1)^3 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1) \checkmark$

2) Hipótesis de Inducción: La igualdad se cumple para n fijo, es decir, $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ (H.I.)

3) Nos falta probar que la igualdad se tiene para $(n+1)$, es decir, $\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$

Dem: $\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^3 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 + (2(n+1)-1)^3$ | Note que hemos hecho aparecer el término $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3$ para usar 2)
 $= n^2(2n^2-1) + (2(n+1)-1)^3$ | aquí usamos la H.I.
 $= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

y $(n+1)^2(2(n+1)^2-1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$, luego, por principio de inducción, la igualdad se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$.

P2 Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{n+2} + 6i \left(i + \frac{1}{3} \right) \right) - \sum_{i=3}^{2n+4} n$$

Sol: Para desarrollar lo anterior, debemos recordar algunas propiedades de la suma:

$$i) \sum_{i=I}^J 1 = (J - I + 1) \quad (A1)$$

$$ii) \sum_{i=I}^J \alpha \cdot a_i = \alpha \cdot \sum_{i=I}^J a_i \quad (A2)$$

$$iii) \sum_{i=I}^J (a_i - a_{i+1}) = a_I - a_{J+1} \quad (\text{PROPIEDAD TELESCÓPICA}) \quad (A3)$$

También existen sumas conocidas:

$$i) \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \left(\text{Si parte de 1 también vale la igualdad} \right) \quad (B1)$$

$$ii) \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (B2)$$

$$iii) \sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (B3)$$

Para calcular el valor de la suma que nos piden vamos a calcular el valor de cada uno de los 3 términos que la forman:

$$\bullet \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

Para esta suma, vamos a separar la expresión en 2 términos tal que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(i+1)(i+2)} &= \frac{A}{(i+1)} + \frac{B}{(i+2)} \\
 &= \frac{A(i+2) + B(i+1)}{(i+1)(i+2)} \\
 &= \frac{Ai + 2A + Bi + B}{(i+1)(i+2)} \\
 &= \frac{(A+B)i + (2A+B)}{(i+1)(i+2)}
 \end{aligned}$$

igualando $1 = (A+B)i + (2A+B)$ se tiene que:

$$(A+B) = 0 \quad (1)$$

$$(2A+B) = 1 \quad (2)$$

De (1), $A = -B$ y reemplazando en (2):

$$2(-B) + B = 1 \Rightarrow -B = 1 \text{ y } A = -(-1) = 1$$

$$\text{Así, } \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{(i+1)} - \frac{1}{(i+2)}$$

$$\text{Reescribiendo la suma: } \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)} - \frac{1}{(i+2)}$$

Luego, llamando $a_i = \frac{1}{(i+1)}$, entonces $a_{i+1} = \frac{1}{((i+1)+1)} = \frac{1}{(i+2)}$ y se tiene que:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)} - \frac{1}{(i+2)} = \sum_{i=0}^n a_i - a_{i+1} \xrightarrow{\text{PROPIEDAD TELES-CÓPICA}} a_0 - a_{n+1} = \frac{1}{(0+1)} - \frac{1}{((n+1)+1)}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+2)}$$

$$\text{Así, } \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1 - \frac{1}{(n+2)}$$

$$\cdot \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{(n+2)} + 6i \left(i + \frac{1}{3} \right) \right)$$

Separando:

$$= \frac{1}{(n+1)} \left\{ \underbrace{\sum_{i=0}^n \frac{1}{(n+2)}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{i=0}^n 6i \left(i + \frac{1}{3} \right)}_{\textcircled{2}} \right\}$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{(n+2)} \sum_{i=0}^n 1 \quad / \text{ sacamos } \frac{1}{(n+2)} \text{ de la suma pues no depende de } i$$

$$= \frac{1}{(n+2)} (n - 0 + 1) \quad / \text{ donde usamos propiedad (A1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

$$\textcircled{2} = 6 \sum_{i=0}^n i \left(i + \frac{1}{3} \right) \quad / \text{ donde usamos propiedad (A2)}$$

$$= 6 \left(\sum_{i=0}^n i^2 + \frac{i}{3} \right)$$

$$= 6 \left(\sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n \frac{i}{3} \right) \quad / \text{ donde separamos la suma}$$

$$= 6 \left(\frac{m(m+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^n i \right) \quad | \text{ donde usamos (B2) y la propiedad (A2) }$$

$$= 6 \left(\frac{m(m+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) \right) \quad | \text{ donde usamos (B1) }$$

$$= m(m+1)(2n+1) + m(m+1)$$

$$= m(m+1)(2n+1+1)$$

$$= m(m+1)(2n+2)$$

$$= 2n(m+1)(n+1)$$

$$= 2n(n+1)^2$$

Así,

$$\frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{(n+2)} + 6i \left(i + \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \{ \textcircled{1} + \textcircled{2} \}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left\{ \frac{(n+1)}{(n+2)} + 2n(n+1)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left\{ \frac{(n+1) + 2n(n+1)^2(n+2)}{(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \left\{ \frac{(n+1)(1 + 2n(n+1)(n+2))}{(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1 + 2n(n+1)(n+2)}{(n+2)}$$

$$\bullet \sum_{l=0}^{2n+4} m = 1 + 2n(n+1)(n+2) + \dots$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{2n+4} n &= n \sum_{i=3}^{2n+4} 1 \quad | \text{ m no depende de i luego sale} \\ &= n((2n+4) - 3 + 1) \quad | \text{ donde usamos propiedad (A1)} \\ &= n(2n+4-2) \\ &= n(2n+2) \\ &= 2n(n+1)\end{aligned}$$

Así, juntando todo nos queda:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{n+2} + 6i\left(i+\frac{1}{3}\right) \right) - \sum_{i=3}^{2n+4} n \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} + 2n(n+1)^2 - 2n(n+1) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} + 2n(n+1)((n+1) - 2n) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} + 2n(n+1)(1-n) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} - 2n(n+1)(n-1) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} - 2n(n^2-1) \quad //\end{aligned}$$

P11 Use el símbolo $\sum$ para abreviar las siguientes sumas y calcule su valor.

$$a) (1^3 - 3 \cdot 1) + (2^3 - 3 \cdot 2) + (3^3 - 3 \cdot 3) + (4^3 - 3 \cdot 4) + \dots + (2019^3 - 3 \cdot 2019)$$

Sol: La suma anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2019} i^3 - 3i &= \sum_{i=1}^{2019} i^3 - \sum_{i=1}^{2019} 3i \\
&= \left(\frac{2019(2019+1)}{2} \right)^2 - 3 \sum_{i=1}^{2019} i \quad \left| \text{donde usamos la propiedad (A2) y (B3)} \right. \\
&= \left(\frac{2019(2020)}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{2019(2019+1)}{2} \right) \quad \left| \text{donde usamos (B1)} \right. \\
&= \frac{(2019)^2 (2020)^2}{4} - \frac{3(2019)(2020)}{2} \\
&= \frac{(2019)^2 (2020)^2 - 6(2019)(2020)}{4} \\
&= \frac{(2019)(2020) \left((2019)(2020) - 6 \right)}{4} //
\end{aligned}$$

b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 29^3$

Sol. Note que va sumando los números impares hasta el 29, todos elevados a 3, por ende la suma es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{14} (2i+1)^3 &= \sum_{i=0}^{14} 8i^3 + 12i^2 + 6i + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{14} 8i^3 + \sum_{i=0}^{14} 12i^2 + \sum_{i=0}^{14} 6i + \sum_{i=0}^{14} 1 \\
&= 8 \sum_{i=0}^{14} i^3 + 12 \sum_{i=0}^{14} i^2 + 6 \sum_{i=0}^{14} i + (14-0+1) \quad \left| \text{donde usamos (A1) y (A2)} \right. \\
&\quad \left(\text{B1), (B2) y (B3)} \right) \rightarrow = 8 \left(\frac{14(14+1)}{2} \right)^2 + 12 \left(\frac{14(14+1)(2(14)+1)}{6} \right) + 6 \left(\frac{14(14+1)}{2} \right) + 15 \\
&= \frac{8}{2} \left(\frac{14(15)}{2} \right)^2 + \frac{12}{6} \left(\frac{14(15)(29)}{6} \right) + \frac{6}{2} \left(\frac{14(15)}{2} \right) + 15
\end{aligned}$$

$$= 4(14)^2(15)^2 + 2(14)(15)(29) + 3(14)(15) + 15$$

$$= 15(4(14)^2(15) + 2(14)(29) + 3(14) + 1)$$

$$c) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{100(100+1)}$$

Sol: Note que el último término nos da la pista de como es este término

Ans:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{donde separamos } \frac{1}{i(i+1)} \text{ en } \frac{A}{i} + \frac{B}{i+1}$$

$$\frac{A}{i} + \frac{B}{i+1} = \frac{A(i+1) + Bi}{i(i+1)} = \frac{Ai + Bi + A}{i(i+1)} = \frac{(A+B)i + A}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$$

$$\Rightarrow (A+B) = 0$$

$$A = 1$$

$$\Rightarrow B = -1$$

$$\text{Ans, } \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \quad \text{tomando } a_i = \frac{1}{i} \text{ se tiene que}$$

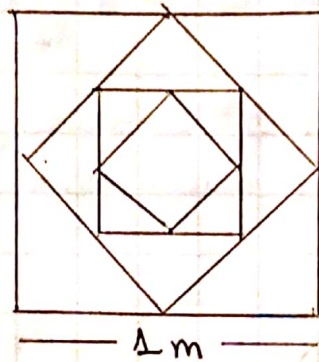
$$= \sum_{i=1}^{100} a_i - a_{i+1}$$

$$= a_1 - a_{100+1} \quad / \text{ donde usamos la PROPIEDAD TELESCÓPICA}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{100+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{101} //$$

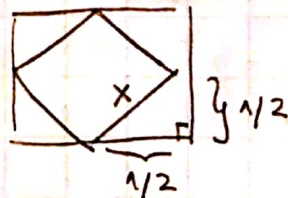
P3] Dado un cuadrado de un metro de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar el mismo proceso, y así sucesivamente.



a) Escribe la sucesión formada por el lado del cuadrado que se obtiene al hacer el proceso n veces.

Sol. Para tener una idea de cómo es el proceso, considere $n=4$.

- El 1^{er} cuadrado tiene lado de longitud 1 m
- El 2^{do} cuadrado cumple que:



con x lado del 2^{do} cuadrado. Por teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2$$

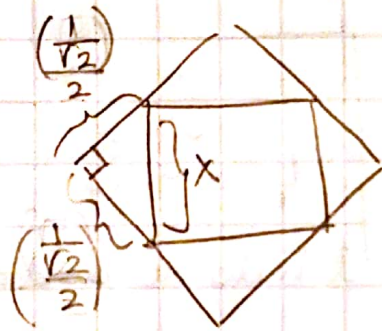
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

Así, el 2^{do} cuadrado tiene lado de longitud $\frac{1}{\sqrt{2}}$ m

• Análogamente, si x es el lado del 3^{er} cuadrado y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es la longitud del lado del 2^{do} cuadrado se cumple nuevamente que:



y por teo de Pitágoras: $\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = x^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{8} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

Así, el 3^{er} cuadrado tiene lado de longitud $\frac{1}{2}$ m

- Para obtener la longitud del lado del 4^{to} cuadrado, usamos teorema de Pitágoras con x la longitud del lado y $\left(\frac{1}{2}\right)$ la longitud de los catetos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{16} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = x$$

Así, la longitud del lado del 4^{to} cuadrado es $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ m

Note entonces que:

Longitud lado cuadrado	1 ^{er}	2 ^{do}	3 ^{er}	4 ^{to}
	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

pero $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$ y $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$, así:

longitud lado del cuadrado: $1^{\text{er}} - 2^{\text{do}} - 3^{\text{er}} - 4^{\text{to}}$
 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \dots$

Luego, llamando:

$a_n =$ "longitud de los lados del cuadrado formado en el paso n^{a} "

se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \\ \rightarrow 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \dots \end{pmatrix}$$

Notemos que, para pasar de un término a otro, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2^0}} & , & \frac{1}{\sqrt{2^1}} & , & \frac{1}{\sqrt{2^2}} & , & \frac{1}{\sqrt{2^3}} & , & \dots \end{array}$$

Esto nos dice que podemos hallar una expresión para el n -ésimo término, así:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

b) Escribe la sucesión formada por las áreas

Sol: Hagamos el proceso hasta $n=4$, ya que obtenemos los lados hasta $n=4$

Área del cuadrado: 1^{er} - 2^{do} - 3^{er} - 4^{to} ... el resto (-)

$$\frac{1}{2^2}, \left(\frac{1}{2^2}\right)^2, \left(\frac{1}{2^4}\right)^2, \left(\frac{1}{2^8}\right)^2, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Luego, llamando:

$a_n =$ "área del cuadrado formado en el paso n "

se tiene que:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Para pasar de un término a otro, se tiene que:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
 $\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$

lo que nos dice que la expresión para el n -ésimo término es:

$$a_n = \frac{1}{2^n},$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0$$

• OBS: Note que como la expresión para el lado del cuadrado en el paso n es $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ entonces tiene sentido que la expresión para el área del cuadrado en el paso n sea $\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

c) Calcula la suma de las áreas de los primeros n cuadrados generados de esta forma.

Sol: Por b), como el área del n -ésimo cuadrado es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

la suma de las áreas de los primeros n cuadrados es:

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

que es una SUMA GEOMÉTRICA con $n \geq 0$ y $r = \frac{1}{2} \neq 1$ (razón)

Suma Geométrica: Si $n \geq 0$ y $r \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\text{Así, } \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+2}} //$$