Ayudantía 3
(14/08/2019)

P1 Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

i) Determine los intervalos de monotonía de f y sus máximos y/o mínimos locales.

Sol: Para hallar los POSIBLES máximos y/o mínimos debemos primero encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$

- $f'(x) = (3x^5 - 5x^3)'$
$= 15x^4 - 15x^2$

luego, $f'(x) = 0 \iff 15x^4 - 15x^2 = 0$
$\iff x^2(x^2-1) = 0$
$\iff x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0$

Así, los posibles candidatos son $-1, 0$ y 1.
Con esto, procedemos a analizar el signo de f' con $f'(x) = 15x^2(x^2-1)$
$= 15x^2(x+1)(x-1)$
y realizamos la tabla:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$(x+1)$	−	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	−	−	−	−	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
	↗		↘		↘		↗

Esto nos dice que $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ y que $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$, pero como en 0 no hay cambio de signo entonces 0 no es ni máximo ni mínimo luego f es estrictamente decreciente en $(-1,1)$.

Por otro lado, como en -1 f' pasa de $+$ a $-$ entonces -1 es un máximo y como en 1 f' pasa de $-$ a $+$ entonces 1 es un mínimo

ii) Determine los intervalos de concavidad de f y sus puntos de inflexión

Sol: Para analizar esto, usemos f'' para hallar los POSIBLES puntos de inflexión, esto es, los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = 0$

- $f''(x) = (15x^4 - 15x^2)'$
$= 60x^3 - 30x$

Luego $f''(x)=0 \iff 60x^3 - 30x = 0$
$\iff 30x(2x^2-1) = 0$
$\iff x(2x^2-1) = 0$
$\iff x=0 \lor 2x^2-1=0$

con $2x^2-1=0 \iff x^2 = 1/2 \iff x = \pm \sqrt{2}/2$

Así, los posibles candidatos son $-\sqrt{2}/2$, 0 y $\sqrt{2}/2$
Para analizar la concavidad veamos el signo de f'' con $f''(x) = 30x(2x^2-1)$ usando la tabla y que $f''(x) = 30x(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$:

	$(-\infty,-\sqrt{2}/2)$	$-\sqrt{2}/2$	$(-\sqrt{2}/2,0)$	0	$(0,\sqrt{2}/2)$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2,+\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+\sqrt{2}/2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-\sqrt{2}/2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

lo anterior nos dice que f es convexa $\forall x \in (-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$ pues aquí $f'' > 0$ y f es cóncava $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$ pues aquí $f'' < 0$

De la misma tabla se obtiene que $-\sqrt{2}/2, 0$ y $\sqrt{2}/2$ son puntos de inflexión (pues hay cambio de signo de la segunda derivada)

iii) Encuentre asíntotas verticales y/u horizontales de f (si es que existen)

Sol: Note que no existen asíntotas verticales pues f está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Analicemos las asíntotas horizontales:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^5 - 5x^3$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^5} - \frac{5}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3-5x^2}{x^5}$$

donde $\lim\limits_{x\to 0^+} 3-5x^2 = 3 > 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^5 - 5x^3$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^5} - \frac{5}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{3-5x^2}{x^5}$$

donde $\lim\limits_{x\to 0^-} 3-5x^2 = 3>0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$\therefore$ f no tiene asíntotas horizontales

10) Calcule los ptos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados. Esboce la gráfica de la función f usando la información obtenida en los ítems anteriores.

Sol: Buscamos los puntos de intersección con los ejes:

• $f(0) = 3\cdot 0^5 - 5\cdot 0^3 = 0$

$\Rightarrow (0,0) \cap OY$

• $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^5 - 5x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x^3(3x^2-5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}\ (\approx 1{,}29)$

Luego los puntos de intersección son:

$(0,0)$, $(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0)$ y $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0)$

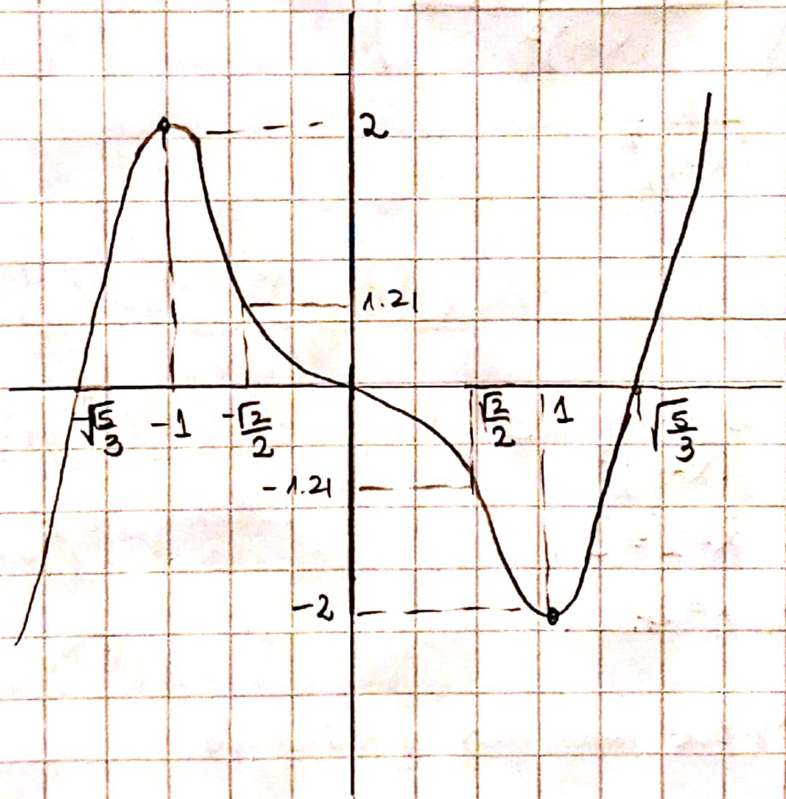
Por otro lado, teníamos que -1 es máximo y 1 mínimo por lo que:

• $f(1) = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 = -2 \Rightarrow$ en $(1,-2)$ hay un mínimo
• $f(-1) = 3\cdot(-1)^5 - 5\cdot(-1)^3 = -3+5 = 2 \Rightarrow$ en $(-1,2)$ hay un máximo

Finalmente, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ son puntos de inflexión donde:

- $f(0)=0$
- $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5-5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \approx -1{,}21$
- $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5-5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \approx 1.21$

Así, el gráfico será:



P2 Considere la función $f: \mathbb{R}-\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$.

i) Determine los intervalos de monotonía de f y sus máximos y/o mínimos locales.

Sol: Al igual que en la pregunta anterior, busquemos f':

- $$f''(x) = \left(\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2\right)'$$

$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'$$

$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{(x-2)'(x+1)-(x-2)(x+1)'}{(x+1)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\left(\frac{1\cdot(x+1)-(x-2)\cdot 1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$$

luego $f'(x)=0 \iff \dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}=0$

$\iff x-2=0$

$\iff x=2.$

entonces 2 es un POSIBLE máximo o mínimo.

Veamos ahora el signo de f' donde $f'(x)=\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ con ptos críticos -1 y 2. Realizando la tabla:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'=\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Esto nos dice que $f'(x)>0$, $\forall x \in (-\infty,-1)\cup(2,+\infty) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ y $f'(x)<0$, $\forall x\in(-1,2) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-1,2)$

Como en 2 hay un cambio de signo de f' de $-$ a $+$, 2 es un mínimo

ii) Determine los intervalos de concavidad de f y sus puntos de inflexión

Sol: Como sabemos, tenemos que calcular primero f'':

$$\cdot\ f''(x) = \left(\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}\right)'$$

$$= 6\left(\frac{(x-2)}{(x+1)^3}\right)'$$

$$= 6\left(\frac{(x-2)'(x+1)^3-(x-2)((x+1)^3)'}{(x+1)^6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{1\cdot(x+1)^3-(x-2)\cdot 3(x+1)^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{(x+1)^3-3(x-2)(x+1)^2\cdot 1}{(x+1)^6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{\cancel{(x+1)^2}((x+1)-3(x-2))}{(x+1)^{\cancel{6}\,4}}\right)$$

$$= 6\left(\frac{x+1-3x+6}{(x+1)^4}\right)$$

$$= 6\left(\frac{7-2x}{(x+1)^4}\right)$$

$$= -6\,\frac{(2x-7)}{(x+1)^4}$$

Luego $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6\dfrac{(2x-7)}{(x+1)^4}=0 \Leftrightarrow 2x-7=0$

$\Leftrightarrow x = 7/2$.

$\Rightarrow$ 7/2 es un POSIBLE punto de inflexión

Para la concavidad, veamos el signo de $f''(x) = -6\frac{(2x-7)}{(x+1)^4}$ con puntos críticos 7/2 y -1. Hagamos la tabla entonces:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,7/2)$	$7/2$	$(7/2,+\infty)$
$(2x-7)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f''=-6\frac{(2x-7)}{(x+1)^4}$	$+$	0	$+$	0	$-$
	$\cup$		$\cup$		$\cap$

Lo anterior nos dice que f es convexa $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (-1,7/2)$ pues $f''(x) > 0$ en este conjunto y f es cóncava $\forall x \in (7/2,+\infty)$ pues aquí $f''(x) < 0$

Note que como en 7/2 la función pasa de convexa a cóncava entonces 7/2 es un punto de inflexión.

iii) Encuentre asíntotas verticales y/u horizontales de f (si es que existen)

Sol: Para las asíntotas verticales analizamos:

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$ y $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ (pues en -1 la función se indefine)

$$\cdot \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$$

donde $\lim_{x\to -1^+}(x-2)^2 = (-3)^2 = 9 > 0$ y $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$$

donde $\lim_{x\to -1^-} (x-2)^2 = (-3)^2 = 9 > 0$ y $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

Así, -1 es una ASÍNTOTA VERTICAL.

Para las horizontales, analizamos que pasa cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$$

$$= \left(\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-2}{x+1}\right)^2$$ / el límite entra pues $(\cdot)^2$ es continua

$$= \left(\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\cancel{x}(1-2/x)}{\cancel{x}(1+\underbrace{1/x}_{0})}\right)^2$$

$$= \left(\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-\cancel{2/x}}{1+\cancel{1/x}}\right)^2$$

$$= (1)^2$$

$$= 1$$

luego 1 es una ASÍNTOTA HORIZONTAL si $x \to \pm\infty$

Note que: $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} = \pm\sqrt{1}$$

Scanned by CamScanner

Si $\frac{x-2}{x+1} = 1 \Rightarrow x-2 = x+1$
$\Rightarrow -2 = 1 \rightarrow\leftarrow$

Si $\frac{x-2}{x+1} = -1 \Rightarrow x-2 = -x-1$
$\Rightarrow 2x = 1$
$\Rightarrow x = 1/2$

Luego $f(x) = 1$ si $x = 1/2$. (esto nos sirve para el dibujo)

iv) Calcule los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados. Esboce la gráfica de la función f usando la información obtenida en los ítems anteriores.

<u>Sol</u>: Veamos los puntos de intersección:

- $f(0) = \left(\frac{0-2}{0+1}\right)^2 = \left(\frac{-2}{1}\right)^2 = 4$

$\Rightarrow (0,4) \cap OY$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x-2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow (2,0) \cap OX$

Por otro lado, de i), 2 es un mínimo donde:

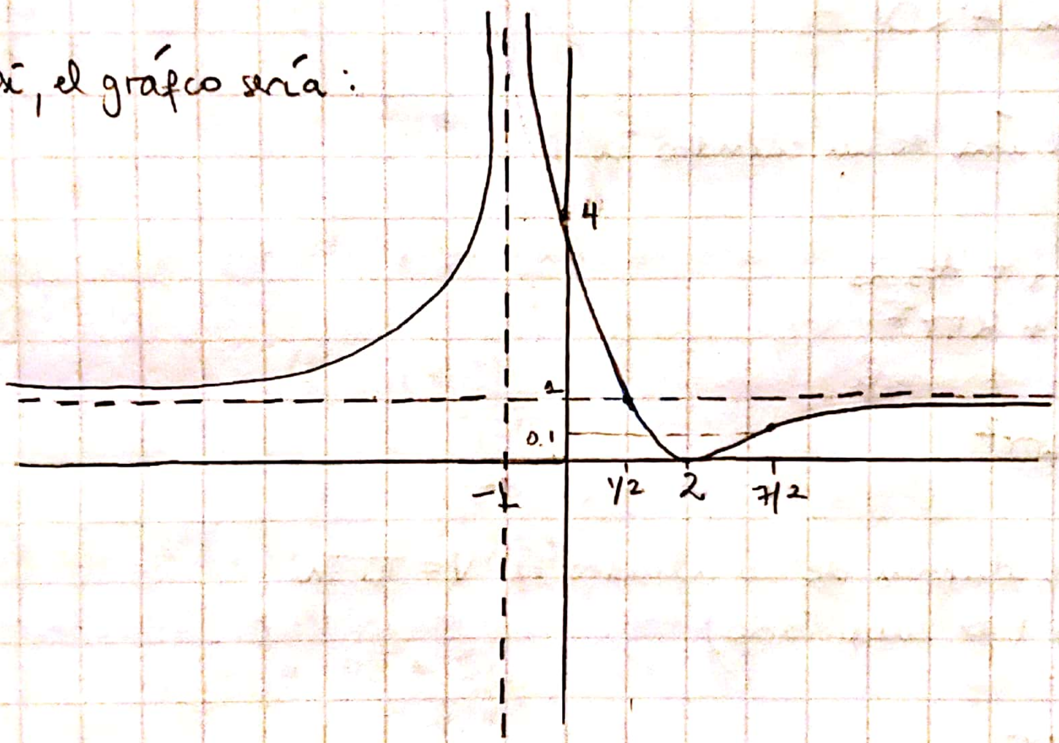
- $f(2) = \left(\frac{2-2}{2+1}\right)^2 = 0 \Rightarrow$ en $(2,0)$ hay un mínimo de f

Finalmente, por ii) 7/2 es un punto de inflexión donde:

- $f(7/2) = \left(\frac{7/2 - 2}{7/2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{3/2}{9/2}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}\,3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

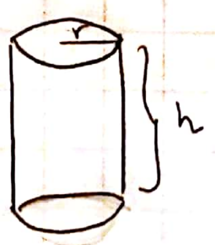
$\Rightarrow$ en $(7/2, 1/9)$ hay un punto de inflexión.

Así, el gráfico sería:



P3| Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico cerrado (con 2 tapas) de base circular y de 125 cm^3 de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener el cilindro (radio y altura) para que la cantidad de metal (área del cilindro) sea mínima.

Sol: Tenemos entonces:



$V = 125\ cm^3$

Para hallar lo pedido, haremos lo siguiente:

1) Buscaremos la expresión que represente el área de un cilindro
2) Dicha expresión debe quedar en función de UNA sola variable
3) Teniendo la función área $A(x)$, la derivamos e igualamos a 0 para hallar el o los puntos que la minimicen o maximicen, en este caso la primera, esto ocurre si $A''(x) > 0, \forall x$.

Sabemos que el área de un cilindro es:

$$A = A_{envoltura} + A_{Tapas}$$
$$= 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$\Rightarrow A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Por otro lado, el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 \cdot h$

Como $V = 125$ (por enunciado)

$$\Rightarrow 125 = \pi r^2 h$$
$$\Rightarrow h = \frac{125}{\pi r^2}$$

Así, $A(r) = 2\pi r\left(\frac{125}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$

$$= \frac{250}{r} + 2\pi r^2$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{250}{r}$$

Scanned by CamScanner

Con esto, busquemos $A'(r)$:

- $A'(r) = \left(2\pi r^2 + \dfrac{250}{r}\right)'$

$$= 4\pi r - \frac{250}{r^2}$$

donde $A'(r) = 0 \iff 4\pi r - \dfrac{250}{r^2} = 0$

$$\iff \cancel{4}^{2}\pi r = \frac{\cancel{250}^{125}}{r^2}$$

$$\iff r^3 = \frac{125}{2\pi}$$

$$\iff r = \frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Note que $A''(r) = \left(4\pi r - \dfrac{250}{r^2}\right)'$

$$= 4\pi + \frac{500}{r^3} > 0, \ \forall r > 0$$

$\Rightarrow r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2\pi}}$ es un mínimo (A es convexa $\forall r > 0$)

y como $h = \dfrac{125}{\pi r^2} \Rightarrow h = \dfrac{125}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2} = \dfrac{\cancel{125}^{5}}{\pi} \cdot \dfrac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\cancel{25}} = \dfrac{5(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi}$

Así, las dimensiones que debe tener el cilindro para que la cantidad de metal sea mínima son:

$$r = \frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ cm} \quad y \quad h = \frac{5(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi} \text{ cm}$$

P4| Dada la curva definida por:

$$y^3+3y^2=x^4-3x^2$$

a) Obtener la ecuación de su recta tangente en $(-2,1)$.

Sol: Supongamos que la curva anterior es la gráfica de una función derivable $y=f(x)$, la cual está definida implícitamente.

Derivación implícita: Una representación explícita de una curva del plano xy está dada por un par de ecuaciones que expresan y en términos de x o x en términos de y y son de la forma $y=f(x)$ o $x=f(y)$.
Existen ecuaciones en las que ninguna variable está en forma explícita. Se dice entonces que dicha ecuación define implícitamente una variable en términos de la otra.
El procedimiento para calcular la derivada de este tipo de funciones se conoce como derivación implícita.

La ecuación de la recta tangente a la curva en $A=(-2,1)$ es:

$$y-1=f'(x)(x+2)$$

donde $f'(x)$ se obtiene derivando implícitamente c/r a x:
Así:

$$3y^2\cdot y'+6y\cdot y'=4x^3-6x$$
$$\Leftrightarrow\; y'(3y^2+6y)=4x^3-6x$$
$$\Leftrightarrow\; y'=\frac{4x^3-6x}{3y^2+6y}$$

Evaluando:

$$y'\Big|_A = \frac{4(-2)^3 - 6(-2)}{3(1)^2 + 6\cdot 1}$$
$$= \frac{-4\cdot 8 + 12}{9}$$
$$= -\frac{20}{9}$$

$\Rightarrow$ la recta tangente buscada es:

$$y - 1 = -\frac{20}{9}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{20}{9}x - \frac{40}{9} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{20}{9}x - \frac{31}{9}$$

b) Determinar en cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales y calcular las abscisas de dichos puntos

Sol: Las rectas tangentes a la curva son aquellas que tienen pendiente 0, luego, por a), buscamos los x tal que:

$$y' = 0 \quad \text{con} \quad y' = \frac{4x^3 - 6x}{3y^2 + 6y}$$

luego esto ocurre ssi $4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2-3) = 0$
$$\Leftrightarrow 2x\left(x - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ la gráfica de f tendrá rectas tangentes horizontales en 3 puntos de abscisas 0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ //