



Control 1 Pauta
Derivadas de orden superior y regla de L'Hôpital.
06/08/2019

Nombre: _____ Sección: _____

Debe mantener su celular apagado y guardado durante el control.

Duración: 20 minutos.

Justifique cada uno de sus resultados.

1. Considere la función $f(x) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right)}{(3x - 5)^3}$.

Demuestre que $f'(2)$ es igual a $2\pi + 9$.

Solución: Para resolver este problema, primero vamos a derivar la función f y luego evaluaremos la función derivada en $x = 2$. La función f es una división de funciones, por lo tanto, vamos a utilizar la regla de la división para calcular su derivada, así

$$f'(x) = \frac{\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right)\right]' (3x - 5)^3 - \tan\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right) [(3x - 5)^3]'}{(3x - 5)^6}.$$

0,5 puntos.

Por otro lado, $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right)\right]' = \frac{\pi x}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right)$

2 puntos.

y $[(3x - 5)^3]' = 9(3x - 5)^2$.

1,5 puntos.

Reemplazando ambas derivadas, obtenemos la siguiente expresión para la derivada de f

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi x}{2}(3x - 5)^3 \sec^2\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right) - 9(3x - 5)^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}(x^2 - 1)\right)}{(3x - 5)^6}.$$

0,5 puntos.

De lo anterior, se sigue que

$$f'(2) = \pi \sec^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 9 \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

0,5 puntos.

Sabemos que $\sec^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$ y $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, por lo tanto, $f'(2) = 2\pi + 9$.

1 punto.

2. Calcule el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x} - 2 - \frac{1}{2}(x - 2)}{-\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} \right).$$

Solución: Definimos $f(x) = \sqrt{2x} - 2 - \frac{1}{2}(x - 2)$ y $g(x) = -\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ y notamos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$. Para aplicar la regla de L'Hôpital es necesario que f y g sean funciones derivables, lo que sí es cierto. Además es necesario que el límite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. De esta manera sería cierta la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1 punto.

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$$

y reiteramos el procedimiento.

2 puntos.

Como $f'(2) = g'(2) = 0$ quisiéramos aplicar nuevamente la Regla de L'Hôpital al límite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Para ello es necesario que f' y g' sean funciones derivables, lo que sí es cierto, además de que el límite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ exista.

0,5 puntos.

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{\sqrt{(2x)^3}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

1,5 puntos.

Así, como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{4}$ existe, por la Regla de L'Hôpital implica que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{4}.$$

0,5 puntos.

Y nuevamente por la Regla de L'Hôpital se obtiene que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x} - 2 - \frac{1}{2}(x - 2)}{-\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} \right) = \frac{1}{4}.$

0,5 puntos.