

- Ayudantía 2
08/08/2019

P11) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - \sqrt{3})^2 - 1$. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $x_0 = \frac{11\sqrt{3}}{12}$ y $x_1 = 2\sqrt{3}$. Muestre que tales rectas son perpendiculares.

Sol: Recordemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto (a, b) corresponde a la siguiente expresión:

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

donde (a, b) se considera como el punto de tangencia con la gráfica de f .

Así, en este caso buscamos las rectas tangentes a f en $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$.

Primero obtenemos $f(x_0)$ y $f(x_1)$:

$$\begin{aligned} \bullet f(x_0) &= f\left(\frac{11\sqrt{3}}{12}\right) = \left(\frac{11\sqrt{3}}{12} - \sqrt{3}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\frac{11\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{12}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{12}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{3}{144} - 1 = \frac{1}{48} - 1 = \frac{1-48}{48} = -\frac{47}{48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x_1) &= f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 - 1 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 1 \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Los puntos son $P_1 = \left(\frac{11\sqrt{3}}{12}, -\frac{47}{48}\right)$ y $P_2 = (2\sqrt{3}, 2)$

Por otro lado, busquemos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= ((x - \sqrt{3})^2 - 1)' \\ &= 2(x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{11\sqrt{3}}{12}\right) = 2\left(\frac{11\sqrt{3}}{12} - \sqrt{3}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{y } f'(2\sqrt{3}) = 2(2\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

Así, las rectas pedidas son:

$$r_1: \left(y + \frac{47}{48}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} \left(x - \frac{11\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$r_2: (y-2) = 2\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$$

Finalmente, para probar que $r_1 \perp r_2$ vemos que, donde $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ y $2\sqrt{3}$ son las pendientes de ambas rectas respectivamente:

$$-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{3} = -1$$

$$\Rightarrow r_1 \perp r_2.$$

P2: Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

i) Encuentre la recta tangente al gráfico de f en $x = \pi/6$.

Sol: Como vimos en P1, buscamos:

$$y - f(\pi/6) = f'(\pi/6)(x - \pi/6)$$

por lo que calculemos $f(\pi/6)$ y $f'(\pi/6)$

$$\begin{aligned} \bullet f(\pi/6) &= \sin(\pi/6) \cos(\pi/6) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (\sin x \cos x)' \\ &= (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(\pi/6) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Así:

$$r_t: y - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}$$

∴ la recta tangente al gráfico de f en $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}$$

ii) Utilizando el ítem anterior, aproxime el valor numérico de $f\left(\frac{1}{2}\right)$

OBS: Para calcular el valor del ítem (ii), aproxime π a 3,14 y $\sqrt{3}$ a 1,73.

Sol: Sabemos que, cerca del punto de tangencia, la recta tangente y la gráfica de f son prácticamente indistinguibles.



Note que $\frac{\pi}{6} \approx \frac{3,14}{6} = 0,52\bar{3}$ y $\frac{1}{2}$ es un punto muy cercano a $\pi/6$, por lo que para obtener lo pedido, usaremos la recta g pues:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \approx f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Así: } \sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{0.5}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 1,73 - 3,14}{12} \\ &= 0,4208\bar{3} \end{aligned}$$

P3] Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 6$.

a) Determine el (los) punto(s) $c \in \mathbb{R}$ tal (es) que $f'(c) = 0$.

Sol: Primero busquemos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \cdot f'(x) &= (x^3 - x^2 - 5x - 6)' \\ &= 3x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

Luego, busquemos los $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \text{ donde}$$

$$c_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$c_2 = \frac{2-8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Así, los $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$ son $\frac{5}{3}$ y -1 .

b) A partir del ítem a), determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\}$.

Sol: Buscamos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ y usando a), es lo mismo que ver:

$$3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 5)(x + 1) > 0$$

Hagamos la tabla de signos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1/3, 5/3)$	$5/3$	$(5/3, +\infty)$
$(3x-5)$	-	-	-	0	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+
$(3x-5)(x+1)$	+	0	-	0	+

Así, el conjunto donde $f'(x) > 0$ es:

$$A = (-\infty, -1) \cup (5/3, +\infty)$$

c) A partir del ítem a), determine el conjunto $H = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$

Sol: Usando b), el conjunto pedido es:

$$H = (-1, 5/3)$$

d) Utilizando lo anterior, determine los intervalos de crecimiento de f y sus máximos y mínimos locales (si es que existen)

Sol: Criterio de la 1^{ra} derivada:

- 1) Si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$ en c entonces f tiene un máximo local en $(c, f(c))$
- 2) Si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ en c entonces f tiene un mínimo local en $(c, f(c))$
- 3) Si $f'(x)$ es $+$ a ambos lados de c o $-$ a ambos lados de c entonces $f(c)$ NO es ni un mínimo ni un máximo local

Usando b), en $c = -1$, $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, por lo que f tiene un máximo local en $(-1, f(-1))$.

En $c = 5/3$, $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$, por lo que f tiene un mínimo local en $(5/3, f(5/3))$.

Con esto, como $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

Como $f'(x) < 0, \forall x \in (-1, 5/3) \Rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 5/3)$.

Finalmente, como $f'(x) > 0, \forall x \in (5/3, +\infty) \Rightarrow f$ es creciente en $(5/3, +\infty)$.

P4] Considere $f: (1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$.

a) Calcule los siguientes límites

i) $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Sol: i) $\lim_{t \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = \left(\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t^3+1}{t^3-1} \right)^{1/4}$ (como $\sqrt[4]{\cdot}$ es continua, el límite puede entrar)

$$= \left(\lim_{t \rightarrow 1^+} t^3+1 \cdot \frac{1}{t^3-1} \right)^{1/4}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 1^+} t^3+1 = 2 > 0$ y $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t^3-1} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = +\infty$

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = \underbrace{\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3+1}{t^3-1} \right)^{1/4}}_{*}$ / meramente el límite entra a la raíz cuarta por $\sqrt[4]{\cdot}$ es continua

$$* \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}$$

Sean $g_1(t) = t^3 + 1$ y $g_2(t) = t^3 - 1$. Se tiene que g_1 y g_2 son derivables en todo $\mathbb{R}$ y además:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g_2(t) = +\infty$$

Aplicando L'Hôpital, se tendría que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^3 + 1)'}{(t^3 - 1)'}$$

SIEMPRE y cuando el límite de la derecha exista (valga $c \in \mathbb{R}$, o $\pm\infty$)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^3 + 1)'}{(t^3 - 1)'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t^2}{3t^2} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Por L'Hôpital, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1^{1/4} = 1 //$$

b) Determine los intervalos de crecimiento de f y sus máximos o mínimos locales (si es que existen).

Sol: Calculemos $f'(t)$:

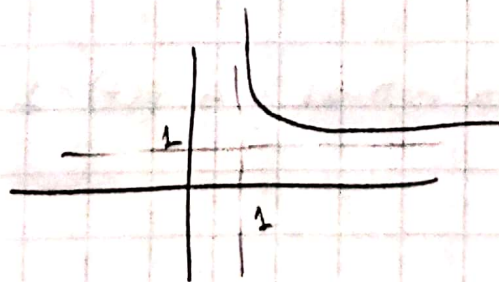
$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \left(\left(\frac{t^3+1}{t^3-1} \right)^{1/4} \right)' \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^3+1}{t^3-1} \right)^{-3/4} \cdot \left(\frac{t^3+1}{t^3-1} \right)' \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^3-1}{t^3+1} \right)^{3/4} \cdot \left(\frac{(t^3+1)'(t^3-1) - (t^3+1)(t^3-1)'}{(t^3-1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^3-1}{t^3+1} \right)^{3/4} \left(\frac{3t^2(t^3-1) - (t^3+1)3t^2}{(t^3-1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^3-1}{t^3+1} \right)^{3/4} \frac{3t^2(\cancel{t^3-1} - \cancel{t^3-1})}{(t^3-1)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^3-1}{t^3+1} \right)^{3/4} \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \\
 &= \frac{-6t^2}{4} \left(\frac{(t^3-1)^3}{(t^3+1)^3} \frac{1}{(t^3-1)^5} \right)^{1/4} \\
 &= \frac{-3t^2}{2((t^3+1)^3 \cdot (t^3-1)^5)^{1/4}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \text{ si } t = 0$$

pero $0 \notin \text{Dom}(f)$.

luego, f NO tiene máximos ni mínimos locales en $(1, +\infty)$.

Usando esto y lo hallado en a), como $f'(t) < 0, \forall t \in (1, +\infty)$ pues $-3t^2 < 0$ y $2((t^3+1)^3(t^3-1)^5)^{1/4} > 0$ entonces f es estrictamente decreciente



c) ¿ES f inyectiva? Justifique su respuesta.

Sol: Problemas que cualquier función estrictamente decreciente es inyectiva.

pd: Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(g)$.

Sean $x_1 \neq x_2$, luego hay 2 opciones:

$$\text{i) } x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \quad (\text{pues } g \text{ es estrictamente decreciente}) \\ \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

$$\text{ii) } x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \\ \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

$$\therefore \text{ Si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

$$\therefore g \text{ es inyectiva} \Rightarrow f \text{ es inyectiva en } (1, +\infty). \quad (\text{pues ah\u00ed } f \text{ es estrictamente decreciente})$$

d) ¿ES f epyectiva? Justifique su respuesta.

Sol: f es epyectiva si $\text{Cod}(f) = \text{Rec}(f)$

$$\bullet \text{ Cod}(f) = [0, +\infty)$$

$$\text{Por lo analizado en a) y b), } \text{Rec}(f) = (1, +\infty) \neq [0, +\infty)$$

$$\therefore f \text{ NO es epyectiva}$$

OBS: En $t=1$ hay una asíntota vertical y en $f(t)=1$ hay una horizontal $\Rightarrow 1 \notin \text{Cod}(f)$