

Ayudañía 1
01/08/19

P11 Calcule la primera y segunda derivada de las sgtes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Sol: Para obtener $f'(x)$ aplicaremos la regla de derivación de la división pues $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x(\cancel{x^2 + 1} - \cancel{x^2 + 1})}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

° OBS: Para comenzar a derivar cualquier función, lo primero que debemos hacer es intentar SIMPLIFICAR lo más posible, así será mucho más fácil derivar después, y para eso debemos considerar todo tipo de restricción asociada a la reducción de los términos involucrados.

Si no lo podemos simplificar nada, simplemente derivamos y cuando lo hallamos hecho, intentaremos reducir lo más posible el resultado, ya que nos podrán pedir derivar dos veces o hallar ciertos puntos asociados a f' y al estar esta simplificada será mucho más fácil.

Ahora la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2} \right)' \\ &= \frac{(4x)'(x^2+1)^2 - 4x((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} \end{aligned}$$

donde hemos aplicado nuevamente la regla de derivación de la división.
Ahora, note que para derivar el término $(x^2+1)^2$ usaremos la **REGLA DE LA CADENA**

* Regla de la cadena: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} \text{Así, } f''(x) &= \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(2(x^2+1) \cdot 2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4(x^2+1)^2 - 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4\cancel{(x^2+1)}((x^2+1) - 4x^2)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \quad \text{donde simplificamos pues } x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{(x^2+x) \sqrt[3]{\sin(x)}}{(1+x+x^2)}$

Sol: Considere las funciones:

$$g_1(x) = \frac{(x^2+x)}{(1+x+x^2)} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \sqrt[3]{\sin x}$$

Note que $(1+x+x^2) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y

$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, luego, utilizando la regla de derivación del producto:

$$\Rightarrow g'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) \quad (*)$$

Así:

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{(x^2+x)'(1+x+x^2) - (x^2+x)(1+x+x^2)'}{(1+x+x^2)^2} \quad / \text{regla para la derivación} \\ &= \frac{(2x+1)(1+x+x^2) - (x^2+x)(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(\cancel{1+x+x^2} - \cancel{x^2-x})}{(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= ({}^3\sqrt{\operatorname{sen} x})' \\ &= ((\operatorname{sen} x)^{1/3})' \\ &= \frac{1}{3}(\operatorname{sen} x)^{-2/3} \cdot \cos x \quad / \text{usamos regla de la cadena} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \cdot {}^3\sqrt{\operatorname{sen} x} + \frac{(x^2+x)}{(1+x+x^2)} \cdot \frac{1}{3}(\operatorname{sen} x)^{-2/3} \cos x$$

Para $g'(x)$, usando (*):

$$\begin{aligned} g'(x) &= (g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x))' \\ &= (g_1'(x)g_2(x))' + (g_1(x)g_2'(x))' \quad / \text{regla de la suma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= g_1''(x)g_2(x) + g_1'(x)g_2'(x) + g_1'(x)g_2'(x) + g_1(x)g_2''(x) \\
 &= g_1''(x)g_2(x) + 2g_1'(x)g_2'(x) + g_1(x)g_2''(x)
 \end{aligned}$$

Por lo que necesitamos obtener $g_1''(x)$ y $g_2''(x)$:

$$\begin{aligned}
 \bullet g_1''(x) &= \left(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \right)' \\
 &= \frac{(2x+1)'(x^2+x+1)^2 - (2x+1)((x^2+x+1)^2)'}{(x^2+x+1)^4} \\
 &= \frac{2(x^2+x+1)^2 - (2x+1)2(x^2+x+1) \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^4} \\
 &= \frac{2(x^2+x+1)((x^2+x+1) - (2x+1)^2)}{(x^2+x+1)^4} \quad / \text{se simplifica pues } (x^2+x+1) \neq 0 \\
 &= \frac{2(x^2+x+1 - (4x^2+4x+1))}{(x^2+x+1)^3} \\
 &= \frac{2(-3x^2-3x)}{(x^2+x+1)^3} \\
 &= \frac{-6(x^2+x)}{(x^2+x+1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet g_2''(x) &= \left(\frac{1}{3} (\operatorname{sen} x)^{-2/3} \cdot \cos x \right)' \\
 &= \frac{1}{3} \left((\operatorname{sen} x)^{-2/3} \cos x \right)' \\
 &= \frac{1}{3} \left(((\operatorname{sen} x)^{-2/3})' \cos x - (\operatorname{sen} x)^{-2/3} \operatorname{sen} x \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} (\operatorname{sen} x)^{-5/3} \cos^2 x - (\operatorname{sen} x)^{1/3} \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g''(x) = - \frac{6(x^2+x)}{(x^2+x+1)^3} \cdot \sqrt[3]{\sin x} + 2 \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \cdot \frac{1}{3} (\sin x)^{-2/3} \cos x \\ + \frac{(x^2+x)}{(1+x+x^2)} \cdot \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} (\sin x)^{-5/3} \cos^2 x - (\sin x)^{1/3} \right] //$$

c) $h(x) = \frac{\cos^4(x) - \sin^4(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

Sol: Primero, desamplifemos $h(x)$:

$$h(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos x + \sin x} \\ = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos x + \sin x} \\ = \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} \\ = \cos x - \sin x$$

donde pedimos que $\cos x + \sin x \neq 0$

* $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0$ / multiplicamos por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a ambos lados

$\Leftrightarrow \sin(\pi/4) \cos x + \cos(\pi/4) \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x + \pi/4) = 0$

y esto ocurre cuando $\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \cos x + \sin x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ques, $h(x) = \cos x - \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

luego; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$h'(x) = -\sin x - \cos x$

y

$h''(x) = (-\sin x - \cos x)'$
 $= -\cos x + \sin x //$

d) $I(x) = \frac{(x^2-1)^3 (x^2+1)^3}{(x^3+x^2+x+1)^3 (x-1)^2}$

Sol $I(x) = \frac{(x^2-1)^3 (x^2+1)^3}{(x^3+x^2+x+1)^3 (x-1)^2}$
 $= \frac{(x+1)^3 (x-1)^3 (x^2+1)^3}{(x^3+x^2+x+1)^3 (x-1)^2}$
 $= \frac{(x-1) (x+1)^3 (x^2+1)^3}{(x^3+x^2+x+1)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (así podemos simplificar $(x-1)$)
 $= \frac{(x-1) ((x+1)(x^2+1))^3}{(x^3+x^2+x+1)^3}$
 $= \frac{(x-1) (x^3+x^2+x+1)^3}{(x^3+x^2+x+1)^3}$
 $= (x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (así podemos simplificar (x^3+x^2+x+1))

Ques, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$I(x) = 1$ y $I''(x) = 0$

P2 Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(3x)}{\cos(5x)}$

* Regla de L'Hôpital: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en una vecindad de x_0 tal que $g'(x) \neq 0$ cerca de x_0 .

Si para $x = x_0$, siendo x_0 un número real, $0 + \infty$ o $-\infty$, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada del tipo: $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

SIEMPRE que el límite del lado derecho sea un real o bien sea $\pm \infty$.

Sol: Notemos que:

$$\bullet 1 + \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cancel{\cos 2\pi} \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} - \cancel{\sin 2\pi} \cancel{\sin \frac{\pi}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sin(3\pi/2)}{\cos(5\pi/2)} \text{ tiene la forma indeterminada del tipo } \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(3x)}{\cos(5x)} \approx \frac{0}{0}$$

Además, $1 + \sin(3x)$ y $\cos(5x)$ son derivables $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, $(\cos(5x))' = -5\sin(5x) \neq 0$ cerca de $\pi/2$

Como se cumplen todas las hipótesis de la regla de l'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(3x)}{\cos(5x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \sin(3x)}{\cos(5x)} \right)'$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos(3x)}{-5 \sin(5x)}$$

$$= \frac{3 \cos(3\pi/2)}{-5 \sin(5\pi/2)}$$

donde $\cos(3\pi/2) = 0$ y $\sin(5\pi/2) = \sin(2\pi + \pi/2)$

$$= \sin(2\pi) \overset{0}{\cancel{\cos \frac{\pi}{2}}} + \sin \frac{\pi}{2} \cos 2\pi$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(3x)}{\cos(5x)} = \frac{3 \cdot 0}{-5 \cdot 1} = 0 //$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Sol:

Si queremos usar l'Hôpital, el límite al menos debería ser de la forma $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ lo que a simple vista no es así. Si separamos

el límite tampoco podemos usar l'Hôpital pues $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{\sin x}$ es imposible que cuando $x \rightarrow 0$ tengan la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Por lo que la idea será desarrollar $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ y obtener algo de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

Luego aplicaremos l'Hôpital sobre el límite del lado derecho previamente comprobando las hipótesis.

En primer lugar, $\sin x - x$ y $x \sin x$ son derivables en todo $\mathbb{R}$. Por otro lado, $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x \neq 0$ para x cerca de 0.

Considerando lo anterior y debido a que:

$$\bullet \sin(0) - (0) = 0$$

$$\bullet 0 \cdot \sin 0 = 0$$

$\Rightarrow \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x=0$.

Juntando todo, por regla de l'Hôpital, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

pero $\cos 0 - 1 = 0$ y $\sin 0 + 0 \cdot \cos(0) = 0$, es, nuevamente el límite toma la forma indeterminada $\left[\frac{0}{0} \right]$, por lo que debemos usar l'Hôpital sobre este último límite

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

1) $\cos x - 1$ y $\sin x + x \cos x$ son derivables en $\mathbb{R}$.

$$2) (\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x \\ = 2 \cos x - x \sin x \neq 0 \text{ en } x \text{ cerca de } 0$$

Así, por l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{0}{2 \cos 0 - 0} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0 // \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$$

Sol: Nuevamente note que:

$$\cdot 1 - \cos(0^2) = 0$$

$$\cdot 0^+ = 0$$

$\Rightarrow \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$ es de la forma indeterminada $\left[\frac{0}{0}\right]$

* $1 - \cos(x^2)$ y x^4 son derivables en todo $\mathbb{R}$.

Por otro lado, $(x^4)' = 4x^3 \neq 0$ para x cerca de 0.

Así, por l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x^2))'}{(x^4)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \end{aligned}$$

pero este último límite nuevamente es como $\frac{0}{0}$, así que volvemos a aplicar l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + x^2 + 1}{\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1}$$

Sol: É dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + x^2 + 1}{\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1} \approx \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Ademais, $3x^4 - x^3 + x^2 + 1$ y $\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1$ son derivables en todo $\mathbb{R}$ (son polinomios)

Tualmente, $\left(\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1\right)' = 6x^3 - 5 \neq 0$

Así, por regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + x^2 + 1}{\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^4 - x^3 + x^2 + 1)'}{\left(\frac{3}{2}x^4 - 5x + 1\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 - 3x^2 + 2x}{6x^3 - 5} \approx \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\stackrel{L'H}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(12x^3 - 3x^2 + 2x)'}{(6x^3 - 5)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 6x + 2}{18x^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{36}x^2}{\cancel{18}x^2} - \frac{\cancel{6}x}{\cancel{3} \cancel{18}x^2} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{18}x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{9x^2}$$

$$= 2 //$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 5x + 1} = 2 //$$