Prueba 3, resuelta

Algebra y Geometría, Bachillerato.

1. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$, C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un operador lineal. Considere las matrices

$$[id]_C^B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad A=[T]_B^C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(a) Determine la base B.

(b) Calcule $T(1,1,0)$.

(c) Determine si el sistema de ecuaciones dado por $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Solución:

(a) Para determinar la base B primero buscaremos la matriz $[id]_B^C$, pues al escribir los vectores de la base B en sus coordenadas canónicas, estas aparecen como columnas de dicha matriz, la cual vamos a obtener invirtiendo $[id]_C^B$, para lo cual procedemos con metodo de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc||ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc||ccc}0 & -3 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc||ccc}0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc||ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Vemos así que

$$A^{-1}=[id]_B^C=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

por lo que $B=\{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right),\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)\}$

Observaciones:

- La base B es esa y NO otra, en ese orden, con esos coeficientes cada vector. Cualquier cambio a la base se ve reflejado en la matriz.

- Se puede resolver esta pregunta por definición de matriz cambio de base, lo cual es correcto (pero me parece un poco más confuso). Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $v_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $v_3 = (c_1, c_2, c_3)$, entonces se tiene que las columnas de la matriz $[id]_C^B$ son las coordenadas respectivas de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, por lo que sabemos $(1,0,0) = v_1 + v_3$, $(0,1,0) = -v_1 + 2v_3$ y $(0,0,1) = v_2 + v_3$. Resolver este sistema no es más dificil que invertir la matriz, y debería dar el mimsmo resultado que el desarrollo anterior.

(b) Para calcular $T(1,1,0)$ usamos la matriz asociada; tenemos que $[T]_C^B[(1,0,0)]_C = [T(1,0,0)]_B$. Dicho esto, procedemos como sigue

$$T(1,1,0) = [T]_B^C[(1,0,0)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ -2 \ \ 1) = [T(1,0,0)]_B$$

Luego $T(1,1,0) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)$

Observaciones:

- Otra forma de resolver esta pregunta (un poco más engorrosa): Por definición la matriz $[T]_C^B$ tiene como columnas las coordenadas $[T(1,0,0)]_B$, $[T(0,1,0)]_B$ y $[T(0,0,1)]_B$ (en ese orden), luego

$$T(1,0,0) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = (2, 0, -1)$$

$$T(0,1,0) = 0 \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$$

Dicho esto

$$T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,0,1) = (2, 0, -1) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)$$

(c) Sea $x = (a, b, c)$. Usaremos la matriz ampliada del sistema para intentar resolverlo dejando la matriz lo más escalonada posible;

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc||c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos inmediatamente que la primera ecuación del sistema dice $0 = -1$, luego el sistema no tiene soluciones al ser inconsistente.

Observaciones:

- $\det A = 0$, lo que implica que la matriz es no invertible. Para efectos de nuestro sistema de ecuacuaciones, esta información solamente nos dice que, de existir solución, esta no es única. Esto no basta para poder afirmar que el sistema tiene infinitas soluciones.
- En caso de resolver un sistema tal, lo que uno encuentra como solución son las coordenadas de los vectores solución dados en la base de partida (en este caso B).

2. Considere $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 3w = 0\}$

   (a) Encuentre una base ortogonal para W.

   (b) Dada una transformación lineal $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $P(x, y, z, w) = \text{proy}_W(x, y, z, w)$, determine las dimensiones de $\text{Ker}(P)$ y $\text{Ker}(P)^\perp$.

Solución:

(a) Primero vemos que $W = \{(y+3w, y, w, z) \mid y, w, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0, 0),\ (3, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\rangle$. Tenemos entonces que $B = \{(1, 1, 0, 0),\ (3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es base de W. Ahora aplicamos parcialmente el método de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal (no es necesario noralizar); $B' = \{v_1,\ v_2, v_3\}$, donde

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = (3, 0, 1, 0) - \text{proy}_{(1,1,0,0)}(3, 0, 1, 0) = (3, 0, 1, 0) - \frac{\langle (3, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\rangle}{\|(1, 1, 0, 0)\|^2}(1, 1, 0, 0)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right)$$

$$v_3 = (0, 0, 0, 1) - \text{proy}_{v_1,v_2}((0, 0, 01)) = (0, 0, 0, 1)$$

Esta última igualdad sucede pues el vector $(0, 0, 0, 1)$ es perpendicular a los otros dos. Concluímos que $B' = \{(1, 1, 0, 0), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right), (0, 0, 0, 1)\}$ es base ortogonal de W. De hecho, podemos facilitar algo la notación y los cálculos poniendo $B'' = \{(1, 1, 0, 0), (3, -3, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ que tambén es base ortogonal de W.

(b) Buscamos una base del núcleo:

$$\text{Ker}(P) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \text{proy}_W v = 0\} = \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{\langle v, s\rangle}{\|s\|^2}s = 0,\ \forall s \in W\right\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^4 \parallel \langle v, s\rangle = 0, \forall s \in W\} = W^\perp$$

Se desprende de esto último que $\text{Ker}(P) = W^\perp$ y $\text{Ker}(P)^\perp = (W^\perp)^\perp = W$.
Dicho esto, sabemos que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$, por lo que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$, con esto tenemos que $\dim(\text{Ker}(P)) = 1$ y $\dim(\text{Ker}(P)^\perp) = 3$

Observaciones:

- Aplicar el método de Gram-Schmidt completamente también da un resultado correcto, aunque simplemente hace ligeramente más complicados los cálculos.
- Para calcular las dimensiones de los espacios pedidos se pueden encontrar las bases de los conjuntos por definición, pero simplemente se hubieran encontrado bases de W y $W^{\perp}$.

3. Considere la siguiente forma cuadrática

$$Q(x,y) = x^2 - y^2 + \sqrt{5}xy$$

(a) Diagonalice la matriz A asociada a esta forma cuadrática.

(b) Determine que cónica es $Q(x,y) = 1$

(c) Realice explícitamente el cambio de variables que permita escribir la cónica sin producto cruzado. Esboce su gráfica.

Solución:

(a) La matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz simétrica asociada a Q, cuyo polinomio característico es

$$p_c(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - \frac{5}{4} = \lambda^2 - \frac{9}{4} = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

a partir del cual tenemos por valores propios $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, por lo que vemos inmediatamente que A es diagonalizable, cuya forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Además quiero los vectores propios para saber la base en la que hay que trabajar.

$$W_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = \lambda_1 v\} = \left\{(x,y) \mid x + \frac{\sqrt{5}}{2}y = \frac{3}{2}x,\ \frac{\sqrt{5}}{2}x - y = \frac{3}{2}y\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \mid x = \sqrt{5}y\right\} = \left\langle \left(\sqrt{5}, 1\right) \right\rangle$$

$$W_{\lambda_2} = \left\{(x,y) \mid x + \frac{\sqrt{5}}{2}y = -\frac{3}{2}x,\ \frac{\sqrt{5}}{2}x - y = -\frac{3}{2}y\right\}$$

$$= \left\{(x,y) \mid x = -\frac{\sqrt{5}}{5}y\right\} = \left\langle \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right) \right\rangle$$

Consideramos entonces la normalización de estos vectores propios para obtener una base ortonormal;

$$B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

(b) (c) Para esto usamos la forma diagonal de nuestra cónica, la cual resprentará el mismo lugar geométrico, pero rotado hacia nuestra base ortonormal B.

$$1 = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 1$$

De esta expresión podemos ver que la cónica correspondiente a esa ecuación es una hipérbola, además de ya saber cuál es el cambio de variable necesario para escribir la cónica sin producto cruzado.

*El esbozo del gráfico no lo incluyo, pero es lo que uno se imagina de una hiperbola rotada al nuevo sistema de referencia B.

Observaciones:

- A diferencia del otro ejercicio, esta base se puede modificar siempre y cuando los vectores resultantes sigan siendo vectores propios asociados a los mismos valores propios (en el orden en el que aparecen dichos valores en la matriz diagonal).

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. De ser verdadera, demuestre. De ser falsa, muestre un contra ejemplo.

(a) Toda matriz diagonalizable es invertible.

(b) Si W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y P es la proyección sobre W, entonces $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$.

(c) Si A es invertible y 1 es valor ropio de A, entonces 1 es valor propio de A^{-1}.

Solución:

(a) Falso. No muchas matrices son invertibles y no muchas matrices son diagonalizables, por lo que construir un contraejemplo no es tan difícil; basta encontrar alguna matriz diagonal de determinante 0. Considere por ejemplo la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz es diagonalizable (de hecho ya está en forma diagonal), pero no es invertible.

(b) Verdadero. Podemos desprender de la pregunta 2 que $\text{Ker}(P) = W^\perp$ y por lo tanto $\text{Ker}(P)^\perp = W$. Sabemos además que $\text{Im}(P) \subset W$ y que $P(W) = W$, luego $\text{Im}(P) = W$. Concluímos que $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$.

(c) Verdadero. Si 1 es valor propio de A, entonces existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $Av = v$. Si multiplicamos por la izquierda por A^{-1} a ambos lados de la igualdad, obtenemos $v = A^{-1}v$, lo que muestra que 1 también es valor propio de A^{-1}.