Ejemplo diagonalización de matrices

Algebra y Geometría, Bachillerato.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal cuya representación matricial en base canónica C es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine si la matriz A es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre su representación diagonal y las matrices cambio de base.

Solución: Sabemos que los valores propios de T corresponden a las raíces del polinomio característico de cualquiera de sus representaciones matriciales (en particular cualquier cambio de base que se le haga a A va a tener el mismo polinomio característico). Dicho esto calculamos

$$p_c(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((4-\lambda)(4-\lambda)-9\right)$$

$$p_c(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) - 9(3-\lambda) = (\lambda-7)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Una forma de comprobar que los valores propios están bien es recurrir al teorema de Cayley-Hamilton (evaluar la matriz en el polinomio característico da la matriz cero);

$$A_1 = A - 7I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A - I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corroborar que $A_1 A_2 A_3 = 0$

Buscamos ahora los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lo que nos da el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 7x \\ -3x + 4y &= 7y \\ 3z &= 7z \end{aligned}$$

Resolviendo podemos deducir que $W_7 = \langle(-1, 1, 0)\rangle$. De forma análoga obtenemos que $W_3 = \langle(0, 0, 1)\rangle$ y $W_1 = \langle(1, 1, 0)\rangle$. Se desprende que A es diagonalizable, pues las multiplicidades geométricas y algebraicas de cada valor propio son iguales (1 para todas en este caso), por lo que si escribimos la función T en la base $B = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ deberíamos obtener una matriz diagonal. De hecho, esta matriz diagonal es aquella que tiene en su diagonal los valores propios ya calculados;

$$D = [T]_B^B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además sabemos que las matrices cambio de base correspondientes son

$$P = [id]_B^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A modo de recordatorio, esta matriz se obtiene colgando las coordenadas de los vectores de la base de partida en la base de llegada. en este caso, la base de llegada es la base canónica, así que las coordenadas de los vectores son sus mismos coeficientes.)

$$P^{-1} = [id]_C^B = ([id]_B^C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(A modo de recordatorio, esta matriz la podemos calcular del mismo modo que la anterior, viendo las coordenadas de cada vector de la primera base en la segunda base y colgandolos, o podemos invertir la matriz P, con método de Gauss por ejemplo.)