

Ejercicios Matriz representante

Álgebra y Geometría, Bachillerato.

1. Determine si las siguientes f son funciones lineales, y de serlo encuentre $[f]_B^{B'}$ (su matriz asociada) para las bases B y B' .

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = B$.

Solución: La función es lineal. Ahora, para encontrar la matriz pedida tenemos que ver la imagen de los vectores de la base de partida bajo la función y escribirlos en sus coordenadas correspondientes a la base de llegada. En este caso es sencillo pues estamos considerando bases canónicas tanto en partida como en llegada;

$$f(1, 0) = (1, 1), \quad [f(1, 0)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0, 1) = (1, -1), \quad [f(0, 1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz se encuentra "colgando" las coordenadas obtenidas anteriormente.

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$

Solución:

$$f(1, 0) = (1, 1), \quad [f(1, 0)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(0, 1) = (1, -1), \quad [f(0, 1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$. $B = \{(3, 1), (2, 0)\}$, $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$

Solución:

$$f(3, 1) = (4, 2), \quad [f(3, 1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(2, 0) = (2, 2), \quad [f(2, 0)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación: Para efectos de función lineal, podemos usar indistintamente la función dada o su matriz asociada, por ejemplo, calculemos la imagen del vector $(5, 1)$ de varias formas distintas:

$$f(5, 1) = (6, 4)$$

Ahora, cuando $B = B'$ y es la base canónica, podemos usar la matriz $[f]_B^{B'}$ que encontramos antes;

$$[(5, 1)]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'}[(5, 1)]_B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} = [(6, 4)]_{B'}$$

Ahora, si consideramos $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ tenemos que

$$[(5, 1)]_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'}[(5, 1)]_B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} = [(6, 4)]_{B'}$$

Esta última igualdad sucede pues $(6, 4) = 5(1, 1) + 1(1, -1)$

Vemos el último ejemplo. Cuando $B = \{(3, 1), (2, 0)\}$, $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ vemos que

$$[(5, 1)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'}[(5, 1)]_B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} = [(6, 4)]_{B'}$$

Donde vemos que la última igualdad es cierta pues $(6, 4) = 5(1, 1) + 1(1, -1)$.

Todas las matrices asociadas se encuentran exactamente de la misma forma.

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{1\}$.
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x - y$. $B = \{(0, 1), (1, 0)\}$, $B' = \{1\}$.
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x + y + z)$. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = B$.
- Haga el ejercicio anterior cambiando las bases y compruebe que hizo todo bien.
- $f : P_2 \longrightarrow P_2$, donde P_2 es el espacio de polinomios de grado 2 o menos, tal que $f(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + (c - b)x + b$. $B = \{1, x, x^2\}$, $B' = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$.

Solución: La función es lineal. Para calcular la matriz asociada vemos la imagen de los elementos de la base de partida y escribimos sus coordenadas en la base de llegada:

$$f(1) = x, \quad f(x) = 1 - x - x^2, \quad f(x^2) = x^2$$

$$[f(1)]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [f(x^2)]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ocupar la matriz como función basta con escribir las coordenadas del vector que queremos evaluar y multiplicarlo en forma de columna a la matriz que encontramos. Por ejemplo $f(1 + 2x + 3x^2) = x^2 - x + 2$. Para verlo matricialmente tomamos las coordenadas correspondientes $[1 + 2x + 3x^2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, luego

$$[f]_B^{B'}[1 + 2x + 3x^2]_B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que el resultado es el polinomio que tiene coordenadas $(2 \ -1 \ 1)$ en la base $B' = \{1, 1+x, 1+x^2\}$, es decir, $2 - (1+x) + (1+x^2) = x^2 - x + 2$, como ya sabíamos.

2. Considere la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada A respecto a las bases canónicas está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Encuentre $f(x, y, z)$.

Solución: Para encontrar la función explícita basta con tomar un vector arbitrario (x, y, z) , expresarlo en sus coordenadas en la base B de partida, que es la canónica en este caso (por lo que $[(x, y, z)]_B = (x \ y \ z)$), y multiplicar

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 3y - 2z \quad -y + 2z \quad 3x + 5y + z \quad 3y - 2z)$$

Luego la imagen de el vector (x, y, z) tiene esas coordenadas en la base de llegada, y como la base de llegada es la base canónica, este vector es $(x + 3y - 2z, -y + 2z, 3x + 5y + z, 3y - 2z)$. De esto concluimos que $f(x, y, z) = (x + 3y - 2z, -y + 2z, 3x + 5y + z, 3y - 2z)$.

3. Una función lineal $f : V \longrightarrow V$ de un espacio de dimensión 4 en sí mismo tiene matriz $A = [f]_B^B$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aquí B es una base de V , pero no sabemos nada más de dicha base. Demuestre que $f(v) = 3v$ para todo $v \in V$.

Solución: Como $\dim V = 4$, consideramos $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base desconocida en la que está escrita la matriz. Para conocer $f(v)$ de un vector arbitrario, basta conocer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ (al final se entenderá a que me refiero con esto, pero lo hemos hecho frecuentemente en ayudantía). Dicho esto, para usar la matriz escribimos las coordenadas del vector en la base B , $[v_1]_B = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$, $[v_2]_B = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$, $[v_3]_B = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$, $[v_4]_B = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Vemos entonces que

$$A[v_1]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \ 0 \ 0 \ 0)$$

y el vector que tiene dichas coordenadas en la base B es $3v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = 3v_1$. Se desprende que $f(v_1) = 3v_1$.

Ahora, si hacemos exactamente lo mismo con los vectores v_2, v_3, v_4 vamos a obtener que $f(v_2) = 3v_2, f(v_3) = 3v_3, f(v_4) = 3v_4$.

Para concluir, sea $v \in V$. Como B es base de V , existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ escalares tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

luego

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3) + \alpha_4 f(v_4) \\ &= \alpha_1 3v_1 + \alpha_2 3v_2 + \alpha_3 3v_3 + \alpha_4 3v_4 \\ &= 3(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) \\ &= 3v. \end{aligned}$$